# 2021 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

# （第一场非数学类）竞赛试题

考生注意：考试时间 150 分钟　　　　试卷总分__100__分

说明：

1. 答题时间为 2.5 小时，7 月 17 日 9:00-11:30，网上交卷截止时间 12:00；

2. 请同学们把竞赛答案写在干净的答题纸上，答题时请写清楚题号，不需要摘抄题目，并将答题纸拍照（可拍多张照片，按顺序答题，标清题号，方便老师评阅），最后将图片放到 word 中，再用 word 转成 PDF，上传 PDF 格式文件。

3. 添加助教老师微信 HiMathor，获得视频讲解课程，如有问题及时沟通。

4. 答题完成在赛氪报名系统（https://www.saikr.com/vse/44125）上传答卷，本次答卷请对应上传到“第一场轮非数学类竞赛答卷”一栏，其他的附件上传位置留空。

5. 如果无法在赛氪系统中提交，可以发送试题答案至备用邮箱 math@mathor.com（邮件标题：参赛编号+数学类/非数类；附件文档命名规则，参赛编号+数学类/非数类.pdf），超过指定时间提交答卷不予判分。

## 一、填空题（每题 6 分，共 30 分）

1．已知函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+x}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，则 $a=$__________.

2．已知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上恒正的可积函数，设 $f_{in}=f(a+i\dfrac{b-a}{n})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=$__________.

3．级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)x^n}$ 的收敛区间是__________.

4．设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶导数，函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由 $e^{xy}-xy=2$ 和 $e^x=\int_0^{x-z}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=$__________.

5．曲线 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ 的渐近线方程是__________.

**二、(10 分)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=2$，证明 $\exists x_1,\ x_2\in(0,1)$，且 $x_1\neq x_2$，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=1$.

三、（**10 分**） 设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$．（1）求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$的值；（2）试证：对任何常数$\lambda>0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$收敛．

四、（**10 分**） 函数列$y_n=y_n(x)\ (0\le x\le 1)\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$满足$y_1=\frac{x}{2}$，$y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}\ (n=2,\ 3,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$．

五、（**10 分**） 计算二重积分$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

六、（10 分） 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x) \geq 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$，$k$ 为任意实数，试证明：$(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x)^2 + (\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x)^2 \leq 1$ .

七、（10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上可导，且 $f(0) = 0$，$f'(x)$ 单调增加，证明：$\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x > \frac{2a}{3}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ .

八、(10 分) 设 $N(0, 0, 1)$ 是球面 $S$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的北极点. $A(a_1, a_2, 0)$、$B(b_1, b_2, 0)$、$C(c_1, c_2, 0)$ 为 $xOy$ 平面上不同的三点. 设连接 $N$ 与 $A$、$B$、$C$ 的三直线依次交球面于点 $A_1$、$B_1$ 和 $C_1$ .

（1）求连接 $N$ 与 $A$ 两点的直线方程;

（2）求点 $A_1$、$B_1$ 和 $C_1$ 的坐标;

（3）给定点 $A(1, -1, 0)$、$B(-1, 1, 0)$、$C(1, 1, 0)$，求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.