2021 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（第一场数学类）竞赛试题

考生注意：考试时间 150 分钟　　　　试卷总分__100__分

说明：

1. 答题时间为 2.5 小时，7 月 18 日 9:00-11:30，网上交卷截止时间 12:00；
2. 请同学们把竞赛答案写在干净的答题纸上，答题时请写清楚题号，不需要摘抄题目，并将答题纸拍照（可拍多张照片，按顺序答题，标清题号，方便老师评阅），最后将图片放到 word 中，再用 word 转成 PDF，上传 PDF 格式文件。
3. 添加助教老师微信 HiMathor，获得视频讲解课程，如有问题及时沟通。
4. 答题完成在赛氪报名系统（https://www.saikr.com/vse/44125）上传答卷，本次答卷请对应上传到“第一场数学类竞赛答卷”一栏，其他的附件上传位置留空。
5. 如果无法在赛氪系统中提交，可以发送试题答案至备用邮箱 math@mathor.com（邮件标题：参赛编号+数学类/非数类；附件文档命名规则，参赛编号+数学类/非数类.pdf），超过指定时间提交答卷不予判分。

1.（13 分）计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\frac{4}{7})^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots(\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$.

2.（12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有二阶导数，对于任何 $x\in[0,2]$ 都有 $|f(x)|\le 1$, $|f''(x)|\le 1$. 证明：恒有 $|f'(x)|\le 2$.

3.（12 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D \left|xy-\frac{1}{4}\right|dxdy, D=[0,1]\times[0,1]$.

4.（13 分）讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \ldots \quad (p > 0, q > 0)$$

的绝对收敛与条件收敛性。

5.（20 分）设 A 为 n 级实对称阵，A 有两个互异的特征值 a,b，其特征多项式为 $f(x)=(x-a)^s(x-b)^t$，这里 $s+t=n$. 令

$$V=\{X \mid AX=XA, X'=X\},$$

这里 X' 表示矩阵 X 的转置, 证明 V 是实数域上的一个线性空间，并求 V 的维数.

6.（15 分）证明：椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ 不是直纹面.

7.（15 分）设 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是次数不超过 n $(n>1)$ 的实系数多项式. 证明：存在次数不超过 $2n-2$ 的非零系数多项式 $F(x,y)$，使得 $F(p(t),q(t))=0$ 对任意实数 t 成立.