2021 年第四届全国大学生数学竞赛网络挑战赛

第二轮竞赛答卷（非数学类）

考生注意： 考试时间 150 分钟 试卷总分 100 分

说明：

1. 答题时间为 2.5 小时， 9 月 25 日 9:00-11:30， 网上交卷截止时间 12:00；

2. 请同学们把竞赛答案写在干净的答题纸上答题时请写清楚题号，不需要摘抄题目， 并将答题纸拍照（可拍多张照片，按顺序答题，标清题号，方便老师评阅）， 最后将图片放到 word 中，再用 word 转成 PDF，上传 PDF 格式文件。

3. 添加助教老师微信 HiMathor， 获得视频讲解课程，如有问题及时沟通。

4. 答题完成在赛氪报名系统（https://www.saikr.com/vse/44125） 上传答卷， 本次答卷请对应上传到“第二场数学类竞赛答卷” 一栏， 其他的附件上传位置留空。

5. 如果无法在赛氪系统中提交， 可以发送试题答案至备用邮箱 math@mathor.com（邮件标题：参赛编号+非数学类； 附件文档命名规则， 参赛编号+非数学类.pdf）， 超过指定时间提交答卷不予判分。

一、填空题（每题 6 分，共 30 分）

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=$_________.

2．已知 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ x, & 1<x<+\infty\end{cases}$， $f(0)=0$， 则 $f(x)=$_________.

3．已知函数 $f(x,\ y)$ 可微，且 $f(x+1,\ e^x)=x(x+1)^2$， $f(x,\ x^2)=2x^2\ln x$，则 $\mathrm{d}f(1,\ 1)=$__________.

4．设 $u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\cdots)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数是_____.

5．已知 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D\left(4-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 取得最大

值的积分区域记为 D_1，记 D_1 的正向边界曲线为 L，则曲线积分

$\int_L \frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=$________________.

二（本题 10 分） 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，

求 $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$ 及极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

三（本题 10 分）讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$ 的敛散性．若收敛，请说明

是条件收敛还是绝对收敛.

四（本题 10 分）已知 $f(x)$ 为连续函数．证明：

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)\mathrm{d}x$$

五（本题 10 分）设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,\ b]$ 上的连续函数．证明：不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

当且仅当常数时等号成立.

六（本题 10 分）证明：函数 $u(x,\ y)=\frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{d}\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\ \eta)\mathrm{d}\eta$ 满足方程

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,\ y)$，其中 $f(x,\ y)$ 是连续函数.

七（本题 10 分）、计算积分 $\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

八（本题 10 分）、设 $f(x)$ 是 $(0,\ +\infty)$ 内单调减少的连续函数，且 $f(x)>0$.

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛.