2021 年第四届全国大学生数学竞赛网络挑战赛

第二轮竞赛答卷（数学类）

考生注意： 考试时间 150 分钟 试卷总分 100 分

说明：

1. 答题时间为 2.5 小时， 9 月 26 日 9:00-11:30， 网上交卷截止时间 12:00；

2. 请同学们把竞赛答案写在干净的答题纸上答题时请写清楚题号，不需要摘抄题目，并将答题纸拍照（可拍多张照片，按顺序答题，标清题号，方便老师评阅） ， 最后将图片放到 word 中，再用 word 转成 PDF，上传 PDF 格式文件。

3. 添加助教老师微信 HiMathor， 获得视频讲解课程，如有问题及时沟通。

4. 答题完成在赛氪报名系统（https://www.saikr.com/vse/44125） 上传答卷， 本次答卷请对应上传到“第二场数学类竞赛答卷” 一栏， 其他的附件上传位置留空。

5. 如果无法在赛氪系统中提交， 可以发送试题答案至备用邮箱 math@mathor.com（邮件标题：参赛编号+数学类； 附件文档命名规则， 参赛编号+数学类.pdf）， 超过指定时间提交答卷不予判分。

一.（本题 12 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}}{n+1}+\dfrac{\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

二.（本题 13 分）已知 $f(x)$ 在 $(-a,a)(a>0)$ 内连续，且 $f'(0)=2$。

（I）证明：对 $0<x<a$，存在 $0<\theta<1$，使得 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；

（II）求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\theta$。

三.（本题 12 分）已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在 $(0,+\infty)$ 内有解，试讨论参数 k 的取值范围。

四.（本题 13 分）已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R=+\infty$，其和函数$S(x)$满足微分方程$y''-2xy'-4y=0$，其中$y(0)=0, y'(0)=1$。

（1）证明：$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n(n=1,2,\cdots)$；（2）求和函数$S(x)$。

五.（本题 20 分） 若A为可逆实方阵, 证明：存在唯一的负矩阵P和正交阵Q, 使得A=PQ.

六.（本题 15 分）设A为n阶复矩阵, 且A为幂零矩阵, 即存在正整数s, 使得A^s=O, 令$e^A=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i$, 证明: e^A与I_n+A相似.

七.（本题 15 分）在三维直角坐标系中, 求直线$l:\begin{cases}2x+y-z=0\\x+y+2z=1\end{cases}$到平面$\pi:3x+By+z=0$的正交投影轨迹方程，其中$B$为常数.