2021 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（第三场非数学类）竞赛试题

考生注意：考试时间 150 分钟　　　　试卷总分： 100 分

说明：

1. 答题时间为 2.5 小时，10 月 30 日 9:00-11:30，网上交卷截止时间 12:00；

2. 请同学们把竞赛答案写在干净的答题纸上，答题时请写清楚题号，不需要摘抄题目，并将答题纸拍照（可拍多张照片，按顺序答题，标清题号，方便老师评阅），最后将图片放到 word 中，再用 word 转成 PDF，上传 PDF 格式文件。

3. 添加助教老师微信 HiMathor，获得视频讲解课程，如有问题及时沟通。

4. 答题完成在赛氪报名系统（https://www.saikr.com/vse/44125）上传答卷，本次答卷请对应上传到“第三场非数学类竞赛答卷”一栏，其他的附件上传位置留空。

5. 如果无法在赛氪系统中提交，可以发送试题答案至备用邮箱 math@mathor.com（邮件标题：参赛编号+数学类/非数类；附件文档命名规则，参赛编号+数学类/非数类.pdf），超过指定时间提交答卷不予判分。

一、填空题（每题 6 分，共 30 分）

1．设 $f'(x)$ 连续， $f(0)=0$， $f'(0)\neq 0$， 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t}{x^3\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}=$__________.

2．$\int_0^{\pi}\dfrac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2021}\mathrm{d}x=$________.

3．设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$， 则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$________.

4．设 $f(x)$ 具有一阶导数， $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，连续并满足

$\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2e^x-4e^2-\int_0^{x-2} f(t+2)\mathrm{d}t$， 则 $f(x)=$________.

5．假设曲面 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_______.

二、（10 分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$.

三、（10 分）设$f(x)$在$[0,1]$连续，在（0，1）二阶可导，$f(0)=\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x$，$f(1)=\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$，证明：至少存在$\xi\in(0,\ 1)$，使$f''(\xi)<0$.

四、（10 分）设$F(x_1,\ x_2,\ x_3)=\int_0^{2\pi}f(x_1+x_3\cos\varphi,\ x_2+x_3\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$，其中$f(u,\ v)$具有二阶连续偏导数．已知$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\int_0^{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[f(x_1+x_3\cos\varphi,\ x_2+x_3\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi$，

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=\int_0^{2\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[f(x_1+x_3\cos\varphi,\ x_2+x_3\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi$，$i=1,\ 2,\ 3$，试求：

$x_3\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial x_3}$.

五、（10 分）已知$x_0=1,\ x_1=\dfrac{1}{x_0^3+4},\ x_2=\dfrac{1}{x_1^3+4},\ \cdots,x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4},\cdots$，求证：

（1）数列$\{x_n\}$收敛；（2）$\{x_n\}$的极限值a是方程$x^4+4x-1=0$的唯一正根.

六、（10 分）求使得$e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\beta}$对一切正整数$n$都成立的最小的$\beta$的值.

七、（10 分）求$I=\int_L\dfrac{(x+y-z)\mathrm{d}x+(y+z-x)\mathrm{d}y+(z+x-y)\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中曲线$L$为

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=1\end{cases}$上自点$A(1,\ 0,\ 0)$至点$C(0,\ 0,\ 1)$的长弧段.

八、（10 分）$x\in\mathrm{R}$，$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(e^x-1-\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^2}{2!}-\cdots-\dfrac{x^n}{n!}\right)$，求$s(x)$.