2022 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（第一场数学类）竞赛试题参考解答

数学分析部分

1. (12 分）称 $X \subset \mathbb{R}^m$ 是道路连通的，若对于 X 中的任意两个点 x, y, 存在连续映射 $\gamma : [a, b] \to X$, 使 $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

   (1) 记 $GL_+(n; \mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶的行列式大于零的方阵全体，证明：$GL_+(n; \mathbb{R})$ 作为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子集是道路连通的。

   (2) 记 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶的行列式为 1 的正交方阵全体为 $SO(n)$（特殊正交群），证明：$SO(n)$ 作为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子集是道路连通的。

解. (1) 回忆三类行初等变换：(i) 某行乘以非零常数倍;(ii) 某行加上另一行的常数倍;(iii) 交换两行。记 $GL_+(n; \mathbb{R}) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \big| \det A > 0\}$, 注意 $GL_+(n; \mathbb{R})$ 中的任意元素 A 均可以通过一系列的 (i) 变换与 (ii) 变换变换为恒等矩阵 (其中 (i) 中乘以的常数倍限定为乘以正的常数倍). 故只需证明：$GL_+(n; \mathbb{R})$ 中的任意两个只相差一个 (i) 变换或 (ii) 变换的元素可以用 $GL_+(n; \mathbb{R})$ 中的道路连接。
…………………………………………………………………… 3'

下证之：

只需证：(a) 若 $A = P_i(c)B, (c > 0)$, 其中 $P_i(c)$ 为对角线上除了第 i 个位置为 c 其余均为 1 的对角矩阵，则 A, B 可用 $GL_+(n; \mathbb{R})$ 中的道路连接。(b) 若 $A = P_{ij}(c)B$,, 其中 $P_{ij}(c)$ 等于恒等矩阵加上第 (i, j) 位为 c 其余位置均为零的矩阵所得的矩阵，则 A, B 可用 $GL_+(n; \mathbb{R})$ 中的道路连接。

对于 (a), 只需令 $\gamma(t) = P_i(tc + (1 - t))B$; 对于 (b)，只需令 $\gamma(t) = P_{ij}(tc)B$.
…………………………………………………………………… 3'

(2) $\forall A \in SO(n)$, 只需证明 A 可以通过 $SO(n)$ 中的道路与单位矩阵连接。首先，必存在正交矩阵 Ω, 使得 $\Omega^{-1}A\Omega$ 形如：

$$\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}, 1\right), \quad 若 n = 2k + 1. \tag{1}$$

或者：

$$\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}\right), \quad 若 n = 2k. \tag{2}$$

令

$$\gamma(t) = \begin{cases} \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \cos\theta_1 t & \sin\theta_1 t \\ -\sin\theta_1 t & \cos\theta_1 t \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \cos\theta_k t & \sin\theta_k t \\ -\sin\theta_k t & \cos\theta_k t \end{bmatrix}, 1\right), & 若 n = 2k + 1. \\ \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \cos\theta_1 t & \sin\theta_1 t \\ -\sin\theta_1 t & \cos\theta_1 t \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \cos\theta_k t & \sin\theta_k t \\ -\sin\theta_k t & \cos\theta_k t \end{bmatrix}\right), & 若 n = 2k. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 则 $t \mapsto \Omega\gamma(t)\Omega^{-1}$ 为连接 A 与单位矩阵的道路。…………… 6'

$\square$

2. (10 分) 对于任意一个 $n\times n$ 矩阵 A, 记 $\|A\|$ 为 A 的算子范数:

$$\|A\|:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 2-范数。设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为光滑映射，且存在小于 1 的正数 c 使得 $\|f'(x)\|\leqslant c,\forall x\in\mathbb{R}^n$，其中 $f'(x)$ 为 f 在 x 处的 Jacobian 矩阵。证明

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n,\\ x &\longmapsto f(x)+x \end{aligned}$$

为一个满射。

证明. $\forall y\in\mathbb{R}^n$, 要证:存在 $x\in\mathbb{R}^n$, 使得 $f(x)+x=y$. 定义 $g_y:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, x\mapsto y-f(x)$, 则等价于要证明 g_y 存在一个不动点。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *5'*
注意

$$\begin{aligned}\|g_y(x_1)-g_y(x_2)\| &= \|f(x_1)-f(x_2)\|\\ &\leqslant \sup_{\xi\in[x_1,x_2]}\|f'(\xi)\|\,\|x_1-x_2\|\\ &\leqslant c\,\|x_1-x_2\| \end{aligned}\tag{4}$$

故 g_y 为一个压缩映射，故由压缩不动点定理知 g_y 存在一个不动点。$\cdots\cdots\cdots\cdots$ *5'*

□

3. (16 分)

(1) 记 $D=[1,+\infty)\times[1,+\infty)$, 设 $f:D\to\mathbb{R}$ 为非负连续函数，且 $f(x,y)$ 关于每一个变量均为单调减函数（即：固定其中任意一个变量，关于另一个变量单调减），证明：级数 $\sum\limits_{n,m\in\mathbb{N}}f(m,n)$ 收敛当且仅当反常积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛。

(2) 设 p,q 为大于零的实数，考虑级数

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^p+m^q}.$$

证明：该级数收敛当且仅当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$.

(3) 设 $k\in\mathbb{N}$, 将上题推广到 k-重求和，即：给出级数

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_k)\in\mathbb{N}^k}\frac{1}{n_1^{p_1}+\cdots+n_k^{p_k}}$$

收敛的充要条件。

证明. (1) 考虑 $D_n=[1,n]\times[1,n]$, 则 $\bigcup_n D_n=D$, 且

$$\begin{aligned}\sum_{2\leqslant k,l\leqslant n}f(k,l)\leqslant\int_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \sum_{2\leqslant k,l\leqslant n}\int_{[k-1,k]\times[l-1,l]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leqslant\sum_{2\leqslant k,l\leqslant n}f(k-1,l-1)\end{aligned}\tag{5}$$

又 f 非负，故级数 $\sum\limits_{n,m\in\mathbb{N}}f(m,n)$ 收敛当且仅当反常积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛。
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *4'*

(2) 由上题，等价于考虑反常积分

$$\iint_D \frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6}$$

的敛散性。记 $E=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, 由变量替换，等价于考虑

$$\iint_E \frac{1}{(x+1)^p+(y+1)^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7}$$

的敛散性。

记 $E=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$，我们首先证明

$$\iint_E \frac{1}{(x+1)^p+(y+1)^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8}$$

的敛散性与

$$\iint_{E\backslash B(0;1)} \frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9}$$

的敛散性相同。(其中 $B(0;1)$ 为以 0 为中心，1 为半径的开圆盘)

不妨设 $p\geqslant q$, 注意

$$\frac{(x+1)^p+(y+1)^q}{x^p+y^q}=\frac{\left\|(x+1,(y+1)^{q/p})\right\|_p^p}{\left\|(x,y^{q/p})\right\|_p^p} \tag{10}$$

其中 $\|x\|_p=((x^1)^p+\cdots+(x^n)^p)^{1/p},\ \forall x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n, p>0$. 由 $\|\cdot\|$ 的性质，存在 $C_1,C_2>0$, 使得:

$$C_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_p\leqslant C_2\|x\|_1,\quad \forall x\in\mathbb{R}^2. \tag{11}$$

故(10)满足:

$$M_1\frac{\left\|(x+1,(y+1)^{q/p})\right\|_1^p}{\left\|(x,y^{q/p})\right\|_1^p}\leqslant\frac{\left\|(x+1,(y+1)^{q/p})\right\|_p^p}{\left\|(x,y^{q/p})\right\|_p^p}\leqslant M_2\frac{\left\|(x+1,(y+1)^{q/p})\right\|_1^p}{\left\|(x,y^{q/p})\right\|_1^p} \tag{12}$$

其中 M_1,M_2 为大于零的常数。

又注意到:

$$\lim_{(x,y)\to\infty}\frac{\left\|(x+1,(y+1)^{q/p})\right\|_1^p}{\left\|(x,y^{q/p})\right\|_1^p}=\lim_{(x,y)\to\infty}\left(\frac{x+1+(y+1)^{q/p}}{x+y^{q/p}}\right)^p=1. \tag{13}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\frac{x+1+(y+1)^{q/p}}{x+y^{q/p}}&=\frac{x+y^{q/p}-y^{q/p}+1+(y+1)^{q/p}}{x+y^{q/p}}\\&=1+\frac{(y+1)^{q/p}-y^{q/p}+1}{x+y^{q/p}}\end{aligned}$$

且

$$0\leqslant\frac{(y+1)^{q/p}-y^{q/p}+1}{x+y^{q/p}}\leqslant\frac{y^{q/p}+1-y^{q/p}+1}{x+y^{q/p}}=\frac{2}{x+y^{q/p}}\to 0. \tag{14}$$

因此由(13), 存在 $r>0$, 使得 $\forall (x,y)\in E$, 当 $\|(x,y)\|_2 \geqslant r$ 时有:

$$\frac{1}{2}\leqslant \frac{\left\|(x+1,(y+1)^{q/p})\right\|_1^p}{\|(x,y^{q/p})\|_1^p}=\left(\frac{x+1+(y+1)^{q/p}}{x+y^{q/p}}\right)^p\leqslant 2 \tag{15}$$

代入(12), 结合(10)知存在 $N_1,N_2>0$, 使得:

$$N_1\leqslant \frac{(x+1)^p+(y+1)^q}{x^p+y^q}\leqslant N_2 \tag{16}$$

对于满足 $\|(x,y)\|_2\geqslant r$ 的 E 中的点成立。由此即知:

$$\iint_E \frac{1}{(x+1)^p+(y+1)^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{17}$$

的敛散性与

$$\iint_{E\setminus\ B(0;1)}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{18}$$

的敛散性相同。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4'

下面集中精力讨论反常积分(18).

令 $D_a=\{(x,y)\in E\setminus B(0;1)\big|1\leqslant x^p+y^q\leqslant a\}$, 则反常积分(18)收敛当且仅当极限:

$$\lim_{a\to+\infty}\iint_{D_a}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{19}$$

存在。做变量替换 $x=r^{1/p}(\cos\theta)^{2/p}, y=r^{1/q}(\sin\theta)^{2/q}$, 则

$$\begin{aligned}\iint_{D_a}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_1^a\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{1}{r}\det\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta\\&=\int_1^a\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{1}{r}\frac{2}{pq}r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}g(\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{pq}(\int_0^{\pi/2}g(\theta)\mathrm{d}\theta)\int_1^a\frac{\mathrm{d}r}{r^{2-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}}\end{aligned}\tag{20}$$

因此，极限(19)存在当且仅当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$. 综上:

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^p+m^q}.$$

收敛当且仅当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4'

(3) 与上题类似地，级数

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_k)\in\mathbb{N}^k}\frac{1}{n_1^{p_1}+\cdots+n_k^{p_k}}$$

的敛散性与反常积分:

$$\int_{E\setminus B(0;1)}\frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k}{x_1^{p_1}+\cdots+x_k^{p_k}} \tag{21}$$

的敛散性相同，其中 E 为 $\{(x_1,\cdots,x_k)\in\mathbb{R}^k\big|x_i\geqslant 0,\forall i\}$. （不要求写出这一事实的证明细节）

和上一小题类似地，记 $D_a=\{(x_1,\cdots,x_k)\in E\setminus B(0;1)\big|1\leqslant(x_1)^{p_1}+\cdots+(x_k)^{p_k}\leqslant a\}$，做广义球极坐标变换：

$$\begin{aligned}x_1&=r^{1/p_1}(\cos\theta_1)^{2/p_1},\\x_2&=r^{1/p_2}(\sin\theta_1)^{2/p_2}(\cos\theta_2)^{2/p_2},\\&\cdots,\\x_k&=r^{1/p_k}(\sin\theta_1)^{2/p_k}\cdots(\sin\theta_{k-1})^{2/p_k}\end{aligned}$$

则

$$\int_{D_a}\frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k}{x_1^{p_1}+\cdots+x_k^{p_k}}=\int_1^a\mathrm{d}r\int_{F_\theta}\frac{1}{r}r^{1/p_1+\cdots+1/p_k-1}h(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{d}\theta_1\cdots\theta_{k-1}$$

因此，极限

$$\int_{D_a}\frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k}{x_1^{p_1}+\cdots+x_k^{p_k}}\tag{22}$$

存在的充要条件是

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}<1.\tag{23}$$

这也是级数

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_k)\in\mathbb{N}^k}\frac{1}{n_1^{p_1}+\cdots+n_k^{p_k}}$$

收敛的充要条件。…………………………………………………… 4'

□

4. (10 分) 考虑 Möbius 带

$$M=\{((a+u\sin\frac{\theta}{2})\cos\theta,(a+u\sin\frac{\theta}{2})\sin\theta,u\cos\frac{\theta}{2})\big|-1<u<1,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\},$$

其中 a 为大于 1 的固定的正数，证明：M 是不可定向的。

证明. 假设 M 可定向，则 M 上存在连续的单位法向量场 $\vec{n}(p),p\in M$. ………… 3'
下面将导出矛盾。考虑 Möbius 带的参数化

$$\begin{aligned}\varphi:(-1,1)\times(0,2\pi)&\longrightarrow M\\(u,\theta)\qquad&\longmapsto((a+u\sin\frac{\theta}{2})\cos\theta,(a+u\sin\frac{\theta}{2})\sin\theta,u\cos\frac{\theta}{2}).\end{aligned}\tag{24}$$

此参数化诱导了 $\operatorname{Im}\varphi$ 上的两个连续的单位法向量场：

$$\vec{n}_1=\frac{\varphi_u\times\varphi_\theta}{\|\varphi_u\times\varphi_\theta\|},\tag{25}$$

$$\vec{n}_2=-\frac{\varphi_u\times\varphi_\theta}{\|\varphi_u\times\varphi_\theta\|}.\tag{26}$$

由连续性，$\vec{n}$ 与这两个向量场之一吻合。不妨设 $\vec{n}|_{\operatorname{Im}\varphi}=\vec{n}_1$. 我们来计算 $\vec{n}$ 在 $C=M\cap\{z=0\}$ 上的限制（注意 $C=\{(a\cos\theta,a\sin\theta,0)\big|\theta\in[0,2\pi]\}$ 为一个单位圆）。$\forall(x,y,0)\in C\setminus\{(a,0,0)\}$，设 $(x,y,0)=(a\cos\theta,a\sin\theta,0)$，经过计算易得：

$$\vec{n}(a\cos\theta,a\sin\theta,0)=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\theta}{2}}}(-(\sin\theta+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2},(\cos\theta-\sin\theta)\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2}).\tag{27}$$

由 $\vec{n}$ 之连续性，应有

$$\lim_{\theta\to 0}\vec{n}(a\cos\theta, a\sin\theta, 0) = \lim_{\theta\to 2\pi}\vec{n}(a\cos\theta, a\sin\theta, 0) = \vec{n}(a,0,0). \tag{28}$$

但是由(27)知：

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\vec{n}(a\cos\theta, a\sin\theta, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\\ \lim_{\theta\to 2\pi}\vec{n}(a\cos\theta, a\sin\theta, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\end{aligned} \tag{29}$$

矛盾，故 M 不可定向。…………………………………………………………… 7'

□

5. (12 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$.

解. 记 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$, 下求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)+f(x))$. 考虑级数相加：

$$\begin{aligned} f(x)+f(x) &= \left(-1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}\\ &= -1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

……………………………………………………………………………… 3'

若已证明：

(*) 对某个 $\delta>0$，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right)$ 在 $[0,\delta]$ 上一致收敛。

从而可逐项求极限，从而

$$\lim_{x\to 0^+}(f(x)+f(x)) = -1+\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right) = -1,$$

从而得到结论

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}. \tag{31}$$

……………………………………………………………………………… 2'

下证 $(*)$, 我们将使用 Abel-Dirichlet 判则，故只需证：

(a) $\forall x>0, \{\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\}_n$ 是单调的。

(b) $\{\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\}_n$ 在 $[0,\delta]$ 上一致收敛到零。

(a) 之证明：

令 $g(y)=1/y^x$, 则 $g'(y)=(-x)y^{-x-1}$, $g''(y)=(-x)(-x-1)y^{-x-2}>0$, 故 g 凸，由 Jenson 不等式，$g(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}(n+2)\leqslant \frac{1}{2}g(n)+\frac{1}{2}g(n+2)$, 即有

$$\frac{1}{(n+1)^x}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^x}+\frac{1}{(n+2)^x}\right). \tag{32}$$

由此立知:

$$\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right)-\left(\frac{1}{(n+1)^x}-\frac{1}{(n+2)^x}\right)\geqslant 0. \tag{33}$$

(a) 得证。

(b) 之证明:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}&=g(n)-g(n+1)\\&=g'(n+\theta)(-1)\qquad \text{对某}\theta\in(0,1)\text{成立}\\&=\frac{x}{(n+\theta)^{x+1}}\end{aligned} \tag{34}$$

故 $\left|\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right|\leqslant\frac{|x|}{n^{x+1}}\leqslant\frac{\delta}{n}$, (b) 得证。…………………………………… 7'

□

2022-7代数试题

1.(12分) 判定多项式x^5+x^3+1在有理系数多项式环中的可约性.

解 首先，易知±1不是多项式的根，因此该多项式没有有理根，故没有一次有理系数因式.（3分）其次，设可分解为2个有理系数多项式的乘积，则必可以分解为2个整系数多项式之积：

$$x^5+x^3+1=(x^2+a_1x+a_2)(x^3+b_1x^2+b_2x+a_2).$$

（6分）比较系数可得：

$$\begin{aligned}
0 &= a_1+b_1\\
1 &= a_2+a_1b_1+b_2\\
0 &= a_2+a_1b_2+a_2b_1 \quad (9\text{分})\\
0 &= a_1a_2+a_2b_2\\
1 &= a_2^2
\end{aligned}$$

故$a_2=\pm1, b_1=b_2=-a_1$; 从而

$$0=a_2-a_1^2-a_1a_2; 1=a_2-a_1^2-a_1.$$

于是

$$1=a_1a_2-a_1=a_1(a_2-1).$$

这和$a_2=\pm1$矛盾. 从而该多项式无2次有理因式，这说明其在有理数域上不可约.（12分）

2.（14分）设5阶方阵A有二个不同特征值λ_1(2重)，λ_2（3重），秩$r(\lambda_1E-A)=r_1, r(\lambda_2E-A)=r_2$. 指出$r_1, r_2$的取值范围并证明$A$的若尔当标准型由$r_1, r_2$完全确定.

解 首先，由特征值几何重数大于0且不超过代数重数知r_1可能取值为3,4;r_2可能取值为2,3,4.（4分）

先考虑r_1对应的若尔当块：

当$r_1=3$时, 对应λ_1的线性无关特征向量个数为2，古有2个若尔当块，全为1阶的；

当$r_1 = 4$时, 对应λ_1的线性无关特征向量个数为1，古有1个若尔当块，为2阶的.（8分）

再考虑r_2对应的若尔当块：

当$r_2 = 2$时, 对应λ_1的线性无关特征向量个数为3，古有3个若尔当块，全为1阶的；

当$r_2 = 3$时, 对应λ_1的线性无关特征向量个数为2，古有2个若尔当块，分别为1阶和2阶的；

当$r_2 = 4$时, 对应λ_1的线性无关特征向量个数为1，古有1个若尔当块，为3阶的.

从而A若尔当标准型完全由r_1, r_2确定.（14分)

3.（14分）设A为n阶半正定实矩阵，B为n阶实方阵，且$A^2B = BA^2$. 证明$AB = BA$.

证明： 因为A半正定，故有正交矩阵Q使得$A = Q^T\Lambda Q$,其中Λ为对角线上元素非负的对角矩阵. (3分)

于是有

$$Q^T\Lambda^2 QB = BQ^T\Lambda^2 Q.$$

令$B_1 = QBQ^T$，则

$$\Lambda^2 B_1 = B_1\Lambda^2.(6分)$$

设$\Lambda = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n), B_1 = (b_{ij})$, 则

$$d_i^2 b_{ij} = d_j^2 b_{ij}.(9分)$$

对任意i, j成立.从而由d_i全部非负知

$$d_i b_{ij} = d_j b_{ij}.(12分)$$

对任意i, j成立.这说明$\Lambda B_1 = B_1\Lambda$, 于是有$AB = BA$. 证毕.(14分)