2022 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（第一场非数学类）竞赛试题

微积分部分参考解答

1. (14 分) 试写下 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x}, & 若\ x\neq 0\\ e, & 若\ x=0\end{cases}$ 的在 0 处的 Taylor 级数的前三项。

解.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\\
&= e^{\frac{x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+o(x^4)}{x}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4'\\
&= e\cdot e^{-x/2+x^2/3-x^3/4+o(x^3)}\\
&= e\Bigg(1+(-x/2+x^2/3-x^3/4+o(x^3))+\frac{1}{2!}(-x/2+x^2/3-x^3/4+o(x^3))^2\\
&\quad +\frac{1}{3!}(-x/2+x^2/3-x^3/4+o(x^3))^3+o(x^3)\Bigg) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4'\\
&= e\cdot\left(1-\frac{1}{2}x+(\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})^2)x^2+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2!}\cdot 2(-\frac{1}{2})\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})^3)x^3\right)+o(x^3)\\
&= e\cdot\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3\right)+o(x^3)
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 6'

□

2. (14 分) 记 $A=\{n\in\mathbb{N}\big|n\,在十进表示中没有\,9\,出现\}$, 证明 $\sum\limits_{n\in A}\frac{1}{n}$ 收敛。

证明. 首先，记 A_k 为 k-位数中没有 9 出现的自然数，记 $10A_k=\{10x\big|x\in A_k\}$, 则 $10A_k\subset A_{k+1}$, 且

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in A_{k+1}} &= \sum_{m\in 10A_k}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+8}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4'\\
&\leqslant \sum_{m\in 10A_k}\frac{9}{m}\\
&= \frac{9}{10}\sum_{m\in A_k}\frac{1}{m}\\
&\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{9}{10}\right)^k\sum_{m\in A_1}\frac{1}{m} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8'
\end{aligned}$$

因此，由比较判则，$\sum\limits_k(\sum\limits_{n\in A_k}\frac{1}{n})$ 收敛，而这又是正项级数，故 $\sum\limits_{n\in A}\frac{1}{n}$ 收敛。$\cdots\cdots$ 2'

□

3. (14 分) 设 a 为大于零的常数, $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 C 由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 决定, 计算第一型曲线积分 $\int_C |z|\,\mathrm{d}s$.

解. 我们首先给 C 一个参数化，注意 C 所在的平面的法向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 显然 $\mathrm{span}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ 为该法向量所张成的线性空间的正交补。用 Gram-Schmidt 正交化可得该正交补的一组标准正交基:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2). \end{aligned}$$

于是我们得到了 C 的一个参数化:

$$\begin{aligned} \gamma : (0,2\pi) &\longrightarrow C \\ \theta &\longmapsto a(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) \end{aligned} \tag{1}$$

计算得:

$$\gamma(\theta) = a(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}, -\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}, -\frac{2\sin\theta}{\sqrt{6}}).$$

·· 8'

且:

$$\|\gamma'(\theta)\| = a$$

因此

$$\begin{aligned} \int_C |z|\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \left| a(-\frac{2\sin\theta}{\sqrt{6}}) \right| a\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2a^2}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} |\sin\theta|\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8a^2}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{4\sqrt{6}a^2}{3} \end{aligned}$$

·· 6'

□

4. (14 分) 设数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ 由递推关系

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n \geqslant 0$$

以及初值条件 $a_0=1, a_1=2$ 决定，求 a_n 的通项公式。

解. 由条件知:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 2(n+1)a_{n+1}x^n - a_nx^n$$

考虑 a_n 的生成级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$, 假设它的收敛半径大于零，则上式等价于:

$$S''(x) - 2S'(x) + S(x) = 0. \tag{2}$$

. . . . 8'

这是一个常系数线性微分方程，它的一个通解为 $S(x) = C_1e^x + C_2xe^x$. 代入 $a_0 = S(0) = 1, a_1 = S'(0) = 2$, 知:

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

故 $S(x) = e^x + xe^x$, 从而

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) x^{n+1}$$

故

$$a_{n+1} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}, n \geqslant 0$$

. . . . 6'

□

5. (14 分) 求二重积分 $\iint_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解. 做变量替换 $x = \sqrt{t}, y = \sqrt{s}$, 则

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&4 \iint\limits_{\substack{x^4+y^4\leqslant 1 \\ x,y\geqslant 0}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&4 \iint\limits_{\substack{t^2+s^2\leqslant 1, \\ t,x\geqslant 0}} (t + s)\frac{1}{\sqrt{st}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
=&\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1, \\ 0\leqslant \theta\leqslant \frac{\pi}{2}}} \left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \right) \mathrm{d}\theta \\
=&\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\mathrm{d}\theta \\
=&\int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{u^4+1}\mathrm{d}u \qquad (令 u = \sqrt{\tan\theta})
\end{aligned}$$

. . . . 6'

注意

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{2u^2}{u^4+1}\mathrm{d}u\\
=&\int \frac{(1-\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{u^2}}+\int \frac{(1+\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{u^2}}\\
=&\int \frac{\mathrm{d}(u+\frac{1}{u})}{(u+\frac{1}{u})^2-2}+\int \frac{\mathrm{d}(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2}\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{(u+1/u)-\sqrt{2}}-\frac{1}{(u+1/u)+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}(u+\frac{1}{u})\\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}}{(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}})^2+1}\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *6’*

因此

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{2u^2}{u^4+1}\mathrm{d}u &= [\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}+C]\Bigg|_0^{+\infty}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}))=\frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2’*

$\square$

线性代数部分参考解答

(15 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & a & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ 相似，

1）求 a 和 b 的值；

2）求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$.

解： 1)

$$\begin{aligned}|\lambda E-A|&=(\lambda+2)\left[(\lambda-a)(\lambda-1)-2\right]\\&=(\lambda+2)\left[\lambda^2-(a+1)\lambda+a-2\right]\end{aligned},$$

$\therefore b=-2$,

$(\lambda+1)(\lambda-2)=\lambda^2-\lambda-2$,

$\therefore a+1=1$，$a=0$. ………………………………… 6'

2) 此时

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\lambda_1=-1，\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & -2\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，\xi_1=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}；$$

$$\lambda_2=2，\lambda_2E-A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，\xi_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}；$$

$$\lambda_3=-2，\lambda_3E-A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & -2 & -2\\ -3 & -1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}；$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$ ………………………………… 9'

（15 分） 实方阵P称为正交投影矩阵，如果$P^2=P^T=P$，设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$是实 n 维向量$\mathrm{R}^n$空间一组线性无关的向量，其中$1\le k\le n$，证明：

（1）存在唯一的正交投影矩阵P，使得P的零空间$N(P)$（即方程组$PX=0$的解空间）由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$生成。

（2）设$k=2$，$n=3$，$\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,1)^T$.写出第一问中的矩阵$P$.

证明：（1）存在性：

取$U=L(\alpha_1,\alpha_2,......,\alpha_k)$的正交补中一组标准正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-k}$，令

$$P=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-k},0,\cdots,0)\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \vdots\\ \varepsilon_{n-k}^T\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=A^TA,$$

则 P 实对称，且$P^2=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-k},0,\cdots,0)\begin{pmatrix}E_{n-k} & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \vdots\\ \varepsilon_{n-k}^T\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=P$,

显然 $A^TAX=0$与$AX=0$同解，而$AX=0$解空间为U，故P满足要求.

• 5’

唯一性：设P_1也满足条件，注意到P与P_1的特征值均为1（$n-k$重），0（k重）.

再由P与P_1实对称，以及$PX=0$与$P_1X=0$同解，则有 R^n 中正交矩阵Q（列由P的对应特征值1与0特征向量构成），使得$Q^TPQ=\begin{pmatrix}E_{n-r} & \\ & 0\end{pmatrix}=Q^TP_1Q$，所以$P=P_1$.

• 5’

（2）

取 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$，则 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5’