2022 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（第二场数学类）参考解答

说明：若举反例，需证明所举反例确为反例，否则不给分

1. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 是连续可微的，证明 $\operatorname{Im} f$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的零面积集（Jordan 测度为零）。

证明. 记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，则 $\forall x,y\in[0,1]$，$\|f(x)-f(y)\|\leqslant M|x-y|$. 将 $[0,1]$ 等分为 $I_1,\cdots,I_n$，则 $f(I_i)$ 包含在一个半径为 $\frac{2M}{n}$ 的开圆盘内，从而 $m(f([0,1])\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\pi\frac{4M^2}{n^2}=\frac{4M^2\pi}{n}$，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4M^2\pi}{n}=0$，故 $m(f([0,1]))=0$. □

2. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在原点处连续，假设存在 $C>0$，使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$，有

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\leqslant C,$$

其中 $\|v\|=\sqrt{(v^1)^2+\cdots+(v^m)^2},\forall v=(v^1,\cdots,v^m)\in\mathbb{R}^m$. 证明：存在唯一一个线性映射 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，使得 $\{\|g(x)-f(x)\|\,\big|x\in\mathbb{R}^n\}$ 有界。

证明. 假设存在 g 满足条件，则 $\|g(x)-f(x)\|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}^n$. 那么由 g 是线性的，$\|2g(x/2)-f(x)\|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}^n$，换言之，$\|2g(x)-f(2x)\|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}^n$，如此反复，就知：$\|2^ng(x)-f(2^nx)\|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}^n$，于是必有：$g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(2^nx)}{2^n}$. 唯一性得证，为了证明存在性，需要证明：(1) 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(2^nx)}{2^n}$ 存在；(2)$x\mapsto g(x):=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(2^nx)}{2^n}$ 是线性的;(3)$\|g(x)-f(x)\|$ 有界。

先证 (1): 等价于证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f(2^nx)}{2^n}-\frac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}}\right)$ 收敛，注意 $\left\|\frac{f(2^nx)}{2^n}-\frac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}}\right\|=\frac{\left\|f(2^nx)-2f(2^{n-1}x)\right\|}{2^n}\leqslant\frac{C}{2^n}$，由比较判别法立得。

再证 (2):

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(2^n(x+y))}{2^n}-\frac{f(2^nx)}{2^n}-\frac{f(2^ny)}{2^n}\right\|&=\left\|\frac{f(2^n(x+y))-f(2^nx)-f(2^ny)}{2^n}\right\|\\&\leqslant\frac{C}{2^n}\end{aligned}$$

当 $n\to+\infty$ 时，上式左边的极限为 $\|g(x+y)-g(x)-g(y)\|$，上式右边的极限为 0. 故 $g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^n$. 因此，为证 g 线性，只需证 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$. 注意由上面的证明，级数 $f(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f(2^nx)}{2^n}-\frac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}}\right)$ 一致收敛到 $g(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=f(0)+f(0)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=0$.

最后证 (3):

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{f(2^n x)}{2^n}-f(x)\right\| \\
=&\left\|\frac{(f(2^n x)-2f(2^{n-1}x))+(2f(2^{n-1}x)-2^2 f(2^{n-2}x))+\cdots+(2^{n-1}f(2x)-2^n f(x))}{2^n}\right\| \\
\leqslant&\frac{C}{2^n}+\frac{2C}{2^n}+\cdots+\frac{2^{n-1}C}{2^n} \\
\leqslant&C,
\end{aligned}
$$

两边取极限，得：$\|g(x)-f(x)\|\leqslant C, \forall x\in\mathbb{R}^n$. □

3. 设 $a_i\in\mathbb{R}, i=1,\cdots,6$, 计算第一型曲面积分 $\iint_{S^2}(a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+a_4x^2y^2+a_5y^2z^2+a_6z^2x^2)d\sigma$, 其中 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big|x^2+y^2+z^2=1\}$ 为单位球面，$d\sigma$ 为面积元。

证明. 令 $H=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+a_4x^2y^2+a_5y^2z^2+a_6z^2x^2$, 注意 H 是齐次函数，所以由欧拉恒等式知：

$$4H=xH_x+yH_y+zH_z.$$

故：

$$
\begin{aligned}
&4\iint_{S^2}Hd\sigma \\
=&\iint_{S^2}(xH_x+yH_y+zH_z)dS \\
=&\iint_{S^2}(H_xdydz+H_ydzdx+H_zdxdy) \\
=&\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\Delta H dxdydz \\
=&\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\Big((12a_1+2a_4+2a_6)x^2+(12a_2+2a_4+2a_5)y^2 \\
&\qquad\qquad+(12a_3+2a_6+2a_5)z^2\Big)dxdydz \\
=&(12a_1+12a_2+12a_3+4a_4+4a_5+4a_6)\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}x^2dxdydz \\
=&\frac{12a_1+12a_2+12a_3+4a_4+4a_5+4a_6}{3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz \\
=&\frac{12a_1+12a_2+12a_3+4a_4+4a_5+4a_6}{3}\iiint r^4\sin\phi drd\phi d\theta \\
=&\frac{12a_1+12a_2+12a_3+4a_4+4a_5+4a_6}{3}\cdot\frac{4\pi}{5}
\end{aligned}
$$

因此，要求的积分等于：

$$\frac{3a_1+3a_2+3a_3+a_4+a_5+a_6}{3}\cdot\frac{4\pi}{5}.$$

□

4. 假设 $\{a_n\}_n$ 为一个有界数列，满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n-a_{n+1}|=0$, 问 $\{a_n\}_n$ 是否收敛，若收敛，证明之；若发散，举出反例。

证明. 从 $[-1,1]$ 的左端点开始一步步走，第 n 步走 $\frac{1}{n}$, 一开始往右走，一直走到超过 1 的前一步就往回走，一直走到超过 -1 的前一步就往回走，如此在 $[-1,1]$ 之间反复走，记第 n 步走到的数为 a_n, 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\{a_n\}_n$ 发散，同时 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n-a_{n+1}|=0$. （反例无证明不给分） $\square$

5. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为光滑函数，且 f 只有一个临界点 (导数为零的点)，且该临界点为 f 的严格局部极大值点，问：f 是否一定有最大值? 若是，给出证明；若不是，给出反例。

证明. (反例无证明不给分)
反例:

$$f(x,y)=2x+2y+e^{-4e(x^2+y^2)}.$$

$\lim\limits_{y\to+\infty}f(0,y)=+\infty$, $\lim\limits_{y\to-\infty}f(0,y)=-\infty$, 故 f 无最大值,但是 $f_x=2-8exe^{-4e(x^2+y^2)}$, $f_y=2-8eye^{-4e(x^2+y^2)}$, 所以 f 的临界点 (x,y) 满足：$x=y, 4exe^{-8ex^2}=1$. 容易验证 $g(x)=4exe^{-8ex^2}$ 的最大值在 $\frac{1}{4\sqrt{e}}$ 处取到，且最大值为：1. 故 f 的临界点只有：$(\frac{1}{4\sqrt{e}},\frac{1}{4\sqrt{e}})$. 算一下 Hessian 可以看到该点为局部极大值点。 $\square$

6. 设 A 是数域 F 上的 n 阶可逆矩阵, 把 A 和 A^{-1} 如下分块:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$ 分别为 $l\times k$, $l\times(n-k)$, $(n-l)\times k$, $(n-l)\times(n-k)$ 矩阵, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} 分别为 $k\times l$, $k\times(n-l)$, $(n-k)\times l$, $(n-k)\times(n-l)$ 矩阵, l,k 均为小于 n 的正整数。用 W 表示 $A_{11}X=0$ 的解空间, 用 V 表示 $B_{22}Y=0$ 的解空间, 其中 X,Y 分别为 $k\times 1$, $(n-l)\times 1$ 未知列向量。证明: $W\cong V$ 。

证明: $\forall\alpha\in W$, 则 $A_{11}\alpha=0$. 从而

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0_{(n-k)\times 1} \end{pmatrix}=A^{-1}A\begin{pmatrix} \alpha \\ 0_{(n-k)\times 1} \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0_{(n-k)\times 1} \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 0_{l\times 1} \\ A_{21}\alpha \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{l\times 1} \\ A_{21}\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{12}A_{21}\alpha \\ B_{22}A_{21}\alpha \end{pmatrix},$$

其中 $B_{22}A_{21}\alpha$ 为 $(n-k)\times 1$ 列向量, 于是 $B_{22}A_{21}\alpha=0$, $A_{21}\alpha\in V$. 令

$$\begin{aligned} \sigma:\ W &\to V \\ \alpha &\mapsto A_{21}\alpha, \end{aligned}$$

则容易验证, σ 为 W 到 V 的映射且保持加法与纯量乘法运算, 因此是线性映射.

设 $\beta\in W$ 且 $A_{21}\alpha=A_{21}\beta$, 则 $A_{21}(\alpha-\beta)=0$. 又 $A_{11}\alpha=A_{11}\beta=0$, 则 $A_{11}(\alpha-\beta)=0$. 于是 $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}(\alpha-\beta)=0$. 由于 A 可逆, 则 $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}$ 列满秩, 从而 $\alpha-\beta=0$, $\alpha=\beta$, σ 为单射; $\forall\gamma\in V$, 则 $B_{22}\gamma=0_{(n-k)\times 1}$, 从而

$$\begin{pmatrix} 0_{l\times 1} \\ \gamma \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 0_{l\times 1} \\ \gamma \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{l\times 1} \\ \gamma \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} B_{12}\gamma \\ 0_{(n-k)\times 1} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{12}\gamma \\ 0_{(n-k)\times 1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}B_{12}\gamma \\ A_{21}B_{12}\gamma \end{pmatrix},$$

由此推出 $A_{11}B_{12}\gamma=0_{l\times 1}$, $A_{21}B_{12}\gamma=\gamma$. 于是 $B_{12}\gamma\in W$, 且 $\sigma(B_{12}\gamma)=A_{21}B_{12}\gamma=\gamma$, 故 σ 为满射, 于是 σ 为 W 到 V 的同构映射, $W\cong V$.

7．设 A 是 n 阶不可逆矩阵, 且 $A=B_1B_2\cdots B_k$, 其中 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 都是幂等矩阵（满足条件 $B_i^2=B_i, i=1,2,\cdots,k$ 的方阵）, 求证: $R\left(E_n-A\right)\le k\left(n-R\left(A\right)\right)$, 其中 E_n 为单位矩阵, $R\left(A\right)$ 表示矩阵 A 的秩.

证明： 由于 $E_n-A=E_n-B_1B_2\cdots B_k=E_n-B_1+B_1\left(E_n-B_2\right)+\cdots+B_1B_2\cdots B_{k-1}\left(E_n-B_k\right)$, 故 $R\left(E_n-A\right)\le\sum_{i=1}^{k}R\left(E_n-B_i\right)$. 又 $A=B_1B_2\cdots B_k$, $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 都是幂等矩阵, 所以

$$R\left(A\right)\le R\left(B_i\right),\ R\left(E_n-B_i\right)+R\left(B_i\right)=n\left(i=1,2,\cdots k\right),$$

则

$$R\left(E_n-A\right)\le\sum_{i=1}^{k}R\left(E_n-B_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(n-R\left(B_i\right)\right)\le k\left(n-R\left(A\right)\right).$$

8．已知 A 是正定矩阵, 证明 $A+A^{-1}-2E$ 是半正定矩阵, 并给出 $A+A^{-1}-2E$ 是正定矩阵的充要条件.

证明： 因 A 正定, 故 A 实对称且特征值均为正实数, 故 A^{-1} 实对称, 进而 $A+A^{-1}-2E$ 实对称. 设 $\lambda>0$ 为 A 的任一特征值, 则 $A+A^{-1}-2E$ 的特征值

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}-2\ge 2\sqrt{\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}}-2=0.$$

故 $A+A^{-1}-2E$ 是半正定矩阵, 进而 $A+A^{-1}-2E$ 是正定矩阵的充要条件为 $\lambda+\frac{1}{\lambda}-2>0$, 即 A 的特征值均大于 0 且不为 1.