2022 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（第二场非数学类）参考解答

1. (14 分) 设 $\{a_n\}_n$ 为趋于正无穷大的实数列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n-a_{n+1}|=0$, 证明数列 $\{\sin a_n\}_n$ 发散。

证明. 考虑趋于无穷大的区间列 $[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi],k\in\mathbb{N}$, 这些区间的长度均为 $\pi/2$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n-a_{n+1}|=0$, 存在 $N>0$, 使 $\forall n>N$, $|a_n-a_{n+1}|<\pi/2$. 所以当 $k>N$ 时，每个区间 $[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi]$ 中至少有 $\{a_n\}$ 中的一项，如此就构造了一个子列 $\{a_{n_k}\}_k$, 使 $\sin a_{n_k}>\frac{\sqrt{2}}{2},\forall k$. 类似地，可以构造子列 $\{\sin a_{m_k}\}_k$, 使 $\sin a_{m_k}<-\frac{\sqrt{2}}{2},\forall k$. 故数列 $\{\sin a_n\}_n$ 发散。 □

2. (14 分) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数，且满足 $\forall x\in\mathbb{R}^n,\forall t\in\mathbb{R}$, 有 $f(tx)=t^2f(x)$, 证明：f 为一个二次型，且 $f(x)=x\cdot H_f(0)\cdot x^T,\forall x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n$, 其中 $H_f(0)$ 为 f 在 0 处的 Hessian 矩阵。

证明. 对 $f(tx)=t^2f(x)$ 两边对 t 求两次导，然后令 $t=0$ 立得。 □

3. (14 分) 从 $[0,1]$ 中随机取 a,b,c 三个数，用它们构造方程 $ax^2+bx+c=0$，试求该方程有两个不同的实根的概率。

解. 记 $\Omega=\{(a,b,c)\in[0,1]^3\big|b^2-4ac>0\}$, 则所求概率为 $V(\Omega)/V([0,1]^3)=\iiint_\Omega dxdydz$. 记 $D=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\big|xz\leqslant 1/4,0\leqslant x,z\leqslant 1\}$, 则:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega dxdydz&=\iint_D(1-2\sqrt{xz})dxdz\\&=\frac{1}{36}(5+6\ln2)\end{aligned}$$

□

4. (14 分) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为加性函数，即 $f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, 证明：$f$ 是线性函数（即 $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$）当且仅当 f 在 0 处连续。

证明. 仅需证当 f 在 0 处连续时，f 线性。注意 $f(x+h)-f(x)=f(h)$, 所以 f 在 0 连续意味着 f 处处连续。同时，f 是加性的可以推出 $\forall r\in\mathbb{Q},\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(rx)=rf(x)$. 于是 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 设 $\{r_n\}_n$ 为一列收敛到 λ 的有理数，则 $f(\lambda x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(r_nx)=\lim\limits_{n\to+\infty}r_nf(x)=\lambda f(x)$. □

5. (14 分) 设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是具有紧支集（即：$\{x\in\mathbb{R}^3\big|f(x)\neq0\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭集）的连续可微的函数，证明：

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{<\nabla f|_{(x-u,y-v,z-w)},(u,v,w)>}{(u^2+v^2+w^2)^{3/2}}dudvdw,$$

其中 ∇f 为 f 的梯度，$<\cdot,\cdot>$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的标准内积（$<(a^1,a^2,a^3),(b^1,b^2,b^3)>=a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3$）。(提示：$f(x,y,z)=-\int_0^{+\infty}\frac{d}{dr}\left(f((x,y,z)-rw)\right)dr$, 其中 w 为单位球面上的任意一点)

证明. 注意由 Newton-Leibniz 公式以及 f 具有紧支集，立得

$$f(x,y,z)=-\int_0^{+\infty}\frac{d}{dr}\left(f((x,y,z)-rw)\right)dr.$$

注意上式左边的取值与 w 无关，故对该式的 w 在单位球面 S^2 上积分得：

$$f(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{S^2}dS\int_0^{+\infty}\frac{d}{dr}\left(f((x,y,z)-rw)\right)dr$$

其中 dS 为 S^2 的面积元。将面积元用球面坐标 $(\phi,\theta)\mapsto w(\phi,\theta)=(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi)$ 写出：

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4\pi}\iint_{S^2}dS\int_0^{+\infty}\frac{d}{dr}\left(f((x,y,z)-rw)\right)dr\\
=&-\frac{1}{4\pi}\iint_{\phi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]}\sin\phi d\phi d\theta\int_0^{+\infty}\frac{d}{dr}\left(f((x,y,z)-rw(\phi,\theta))\right)dr\\
=&-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\phi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi],r\in[0,+\infty)}\frac{d}{dr}\left(f((x,y,z)-rw(\phi,\theta))\right)\sin\phi drd\phi d\theta\\
=&-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\phi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi],r\in[0,+\infty)}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(f((x,y,z)-rw(\phi,\theta))\right)\cdot r^2\sin\phi drd\phi d\theta\\
=&-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\phi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi],r\in[0,+\infty)}\frac{1}{r^3}<\nabla f|_{(x,y,z)-rw(\phi,\theta)},-rw(\phi,\theta)>\cdot r^2\sin\phi drd\phi d\theta\\
=&\frac{1}{4\pi}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^2+v^2+w^2)^{3/2}}<\nabla f|_{(x,y,z)-(u,v,w)},-(u,v,w)>dudvdw
\end{aligned}$$

□

6. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix},\ b_j \neq 0.$$

（1）证明 $r(A)\geq n-1$;

（2）证明 A 的特征值各不相同.

证明：（1）由于 A 右上角有一个 $n-1$ 阶子式 $\begin{vmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{n-1} \end{vmatrix}\neq 0$, 故 $r(A)\geq n-1$.

（2）反证法. 因 A 实对称, 则存在正交阵 Q 使得

$$P^{-1}AP=P^TAP=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值. 若 A 有两个相同的特征值 $\lambda_i=\lambda_j=\lambda$, 则

$$\begin{aligned} r(\lambda E-A)&=r\left(P^{-1}(\lambda E-A)P\right)=r\left(\lambda E-P^{-1}AP\right)\\ &=r\left(diag\{\lambda-\lambda_1,\cdots,\lambda-\lambda_{i-1},0,\lambda-\lambda_{i+1},\cdots,\lambda-\lambda_{j-1},0,\lambda-\lambda_{j+1},\cdots,\lambda-\lambda_n\}\right)\\ &\leq n-2<n-1. \end{aligned}$$

而 A 与 $\lambda E-A$ 有同样的结构, 由（1）应有 $r(\lambda E-A)\geq n-1$, 矛盾.

7. 设 $A_{3\times3}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. 令

$B_{3\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_3+\beta)$,

(1) 求 A 的秩, 并用 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 表示 β;

(2) 求 B 的秩及线性方程组 $BY=\alpha_1-\alpha_2$ 的解.

解：(1) 由题意知, $3-r(A)+1=2$, 所以 $r(A)=2$. 又

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1+k\\2-2k\\-1+3k\end{pmatrix}=\beta.$$

所以

$$\beta=(1+k)\alpha_1+(2-2k)\alpha_2+(-1+3k)\alpha_3\text{（}k\text{为任意常数）}.$$

(2) 由于 $B=A\begin{pmatrix}1&0&0&1+k\\0&1&0&2-2k\\0&0&1&3k\end{pmatrix}$, 则 $r(B)\le r(A)$. 又 B 是在 A 的基础上增加1列得到的, 故 $r(B)\ge r(A)$, 从而 $r(B)=r(A)=2$. 显然线性方程组 $BY=\alpha_1-\alpha_2$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},$$

接下来考虑导出组 $BY=0$ 的解. 由于 $r(B)=2$, 故导出组的基础解系中有两个线性无关的解. 当 $\begin{pmatrix}1&0&0&1+k\\0&1&0&2-2k\\0&0&1&3k\end{pmatrix}Y=0$ 时一定有 $BY=0$, 而 $\begin{pmatrix}1&0&0&1+k\\0&1&0&2-2k\\0&0&1&3k\end{pmatrix}Y=0$ 的通解为

$$l\begin{pmatrix}1+k\\2-2k\\3k\\-1\end{pmatrix}\text{（}l\text{为任意常数）}.$$

取 $l=1$, $k=1$ 和 $k=0$, 便可得 $BY=0$ 的两个线性无关解:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

于是线性方程组 $BY=\alpha_1-\alpha_2$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\end{pmatrix}\text{（}k_1,\ k_2\text{为任意常数）}.$$