2023 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（第一场非数学类）参考解答

1.（本题 14 分）记 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中由直线 $y=x, y=-x, y=-x+4, y=x+2$ 所围成的区域，计算 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解. 令 $u=x+y, v=y-x$, 则:

$$\begin{aligned}\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{0\leqslant u\leqslant 4, 0\leqslant v\leqslant 2}\frac{u-v}{2}\frac{u+v}{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{8}\iint_{0\leqslant u\leqslant 4, 0\leqslant v\leqslant 2}(u^2-v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{8}(\frac{128}{3}-\frac{32}{3})\\ &= 4.\end{aligned}$$

□

2.（本题 14 分）设 $a>0$ 固定，画出曲线 $x^5+y^5=5ax^2y^2$ 的示意图，并计算曲线围成的有界区域的面积。

解. 使用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 得:

$$r(\cos^5\theta+\sin^5\theta)=5a\cos^2\theta\sin^2\theta$$

故

$$r=\frac{5a\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^5\theta+\sin^5\theta}.$$

同时注意曲线具有对称 $(x,y)\mapsto(y,x)$, 画出示意图如下:

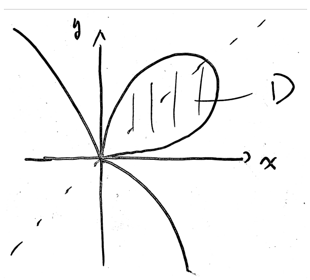

图 1

围成的有界区域 D 的面积为:

$$\begin{aligned}\sigma(D) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{25a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta}{(\sin^5\theta+\cos^5\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{25a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^4\theta}{(1+\tan^5\theta)^2}\mathrm{d}\tan\theta \\ &= \frac{25a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^4}{(1+u^5)^2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{5a^2}{2}.\end{aligned}$$

□

3. (本题 14 分) 设 f 为定义在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的一个开邻域上的具有 $(n+2)$-阶导数的实数值函数，考虑带有 Lagrange 余项的泰勒公式:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1},$$

假设 $f^{(n+2)}(x_0) \neq 0$, 证明：上面的带有 Lagrange 余项的泰勒公式中的 θ 当 $h \to 0$ 时的极限为 $\frac{1}{n+2}$.

证明. 由 $f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)+f^{(n+2)}(x_0)\theta h+o(\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$ 知:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\theta &= \lim_{h\to 0}(n+1)! \frac{f(x_0+h) - \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k}{f^{(n+2)}(x_0)h^{n+2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{n+2} \frac{f^{(n+2)}(x_0+\alpha h)h^{n+2}}{f^{(n+2)}(x_0)h^{n+2}} \\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

□

4. (本题 14 分) 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数:

$$F(t) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin t\mathrm{d}x}{1-2x\cos t+x^2}$$

试求 F 的不连续点集。

解. 若 $t \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$, 则:

$$\begin{aligned}F(t) &= \sin t \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x-\cos t)^2+\sin^2 t} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\frac{x}{\sin t}}{(\frac{x}{\sin t}-\cot t)^2+1} \\ &= \arctan\left(\frac{x}{\sin t}-\cot t\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &= \arctan\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right) - \arctan\left(\frac{-1-\cos t}{\sin t}\right)\end{aligned}$$

故:

$$F(t)=\begin{cases}0, & \text{if } t=n\pi\\ \arctan\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)-\arctan\left(\frac{-1-\cos t}{\sin t}\right), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意 $\frac{1-\cos t}{\sin t}\cdot\frac{-1-\cos t}{\sin t}=-1$, 故若 $\theta=\arctan\frac{1-\cos t}{\sin t}$, 则 $\tan\theta=\frac{1-\cos t}{\sin t}=-\frac{1}{\frac{-1-\cos t}{\sin t}}$, 从而 $\frac{-1-\cos t}{\sin t}=-\frac{1}{\tan\theta}=-\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan(\theta-\frac{\pi}{2})$, 故若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 则 $\arctan\left(\frac{-1-\cos t}{\sin t}\right)=\theta-\frac{\pi}{2}$; 若 $-\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant 0$, 则 $\arctan\left(\frac{-1-\cos t}{\sin t}\right)=\theta+\frac{\pi}{2}$. 所以当 $t\neq n\pi$ 时, $F(t)$ 要么等于 $\frac{\pi}{2}$ 要么等于 $-\frac{\pi}{2}$. 注意 $F(t)$ 的正负号与 $\sin t$ 的正负号一致, 所以:

$$F(t)=\begin{cases}0, & \text{if } t=n\pi\\ \frac{\pi}{2}, & \text{if } 2n\pi<t<(2n+1)\pi\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{if } (2n+1)\pi<t<(2n+2)\pi.\end{cases}$$

所以 F 的不连续点集就是 $\{n\pi|n\in\mathbb{Z}\}$. □

5. (本题 14 分) 考虑 Riemann-Zeta 函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ $(x>1)$, 证明: $\lim\limits_{x\to1+}\zeta(x)=+\infty$.

证明. $\forall M>0$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散知, 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}>M$, 由函数 $x\mapsto\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\cdots+\frac{1}{k^x}$ 的连续性, 存在 $\delta>0$, 使得 $\forall x\in(1,1+\delta)$, 有 $\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\cdots+\frac{1}{k^x}>M$, 于是有:

$$\zeta(x)>M,\forall x\in(1,1+\delta)$$

故 $\lim\limits_{x\to1+}\zeta(x)=+\infty$. □

6.（本题 15 分）设 A,B 为 n 阶正定矩阵，$n>1$，且 $AB=BA$. 证明：$A-B$ 正定当且仅当 A^2-B^2 正定.

证明： 因 A,B 正定，故 $A+B$ 正定，则存在可逆矩阵 C，使得 $A+B=C^{\mathrm{T}}C$. 又 $AB=BA$，故

$$\begin{aligned}A^2-B^2&=A^2-B^2+AB-BA=(A-B)(A+B)\\&=C^{-1}C(A-B)C^{\mathrm{T}}C\sim C(A-B)C^{\mathrm{T}}\simeq A-B.\end{aligned}$$

显然 $A-B$ 与 A^2-B^2 均实对称，故若 $A-B$ 正定，则 $C(A-B)C^{\mathrm{T}}$ 正定，$C(A-B)C^{\mathrm{T}}$ 的特征值均大于 0，A^2-B^2 的特征值也均大于 0，故 A^2-B^2 正定；反之，若 A^2-B^2 正定，则 A^2-B^2 的特征值均大于 0，$C(A-B)C^{\mathrm{T}}$ 的特征值也均大于 0，故 $C(A-B)C^{\mathrm{T}}$ 正定，故 $A-B$ 也正定.

7.（本题 15 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & \lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & \lambda_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}$.

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+0\\ a_1 & \lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n+0\\ a_1 & a_2 & \lambda_3 & \cdots & a_n+0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n-a_n\end{vmatrix}=a_n\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1\\ a_1 & \lambda_2 & a_3 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \lambda_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1\end{vmatrix}+(\lambda_n-a_n)D_{n-1}$$

$$\begin{aligned}&=a_n\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-a_i)+(\lambda_n-a_n)D_{n-1}\\&=a_n\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-a_i)+(\lambda_n-a_n)\left[a_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}(\lambda_i-a_i)+(\lambda_{n-1}-a_{n-1})D_{n-2}\right]\\&=a_n\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-a_i)+a_{n-1}(\lambda_n-a_n)\prod_{i=1}^{n-2}(\lambda_i-a_i)+(\lambda_n-a_n)(\lambda_{n-1}-a_{n-1})D_{n-2}\\&=\cdots\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i\prod_{j\neq i}(\lambda_j-a_j)+\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-a_i).\end{aligned}$$