# 2023 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

# （第二场非数学类）参考解答

**1.**（本题 14 分）设数列 $\{a_n\}_n$ 由 $a_1=1, a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n}$ 定义，试证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在并求之。

证明.（猜：极限为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，又 $a_1=1$, 所以猜 $a_n$ 从 1 开始单调增地收敛到 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$）

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2} &= 1+\frac{a_n}{1+a_n}-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1+2a_n}{1+a_n}-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}+a_n(\frac{3-\sqrt{5}}{2})}{1+a_n} \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+a_n}{1+a_n} \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{a_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1+a_n}
\end{aligned}$$

故恒有 $a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 又 $a_n>1, \forall n$, 故若记 $b_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-a_n$, 就有：

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2(1+a_n)}b_n \\
&< \frac{3-\sqrt{5}}{4}b_n \\
&\leqslant \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n b_1 \to 0.
\end{aligned}$$

所以：

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{1}$$

□

**2.**（本题 14 分）设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & 若\ x\neq 0 \\ 0, & 若\ x=0. \end{cases}$，求 $f$ 在 0 处的所有高阶导数。

证明. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t}=0$. 故 $f'(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } x=0 \\ \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, & \text{if } x\neq 0. \end{cases}$ 然后归纳地证明：$f^{(k)}(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } x=0 \\ P_k(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}, & \text{if } x\neq 0. \end{cases}$，其中 $P_k$ 是某个多项式。 □

**3.**（本题 14 分）设 $n$ 为一个固定的正整数，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 试确定所有的满足 $f^{(n)}=f^{(n-1)}$ 的函数 $f$.

解. 记 $g_n(x)=f^{(n)}(x)$, 则：$g'_{n-1}=g_{n-1}$, 解之，得：$g_{n-1}(x)=Ce^x$. 即有非齐次方程：

$$f^{(n-1)}(x)=Ce^x.$$

该非齐次方程的通解就是：

$$Ce^x+h(x).$$

其中 $h(x)$ 是对应的齐次方程:

$$y^{(n-1)}(x)=0.$$

的解，而该齐次方程的解就是 $n-2$ 阶多项式全体。故满足 $f^{(n)}=f^{(n-1)}$ 的函数 $f$ 全体就是：

$$Ce^x+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0. \quad (a_0,\cdots,a_{n-2},C\in\mathbb{R}.)$$

$\square$

**4.**（本题 14 分）设 $0<a<1$, $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big|0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$ 为单位立方体，计算：

$$\iiint_\Omega \min\{1,\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解.

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega \min\{1,\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&\iiint_{[0,a]^3}\min\{1,\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\iiint_{[a,1]\times[0,a]\times[0,a]}\min\{1,\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&+3\iiint_{[a,1]\times[a,1]\times[0,a]}\min\{1,\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{[a,1]^3}\min\{1,\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&a^3+3\iiint_{[a,1]\times[0,a]\times[0,a]}\frac{a}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\iiint_{[a,1]\times[a,1]\times[0,a]}\min\{\frac{a}{x},\frac{a}{y}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&+\iiint_{[a,1]^3}\min\{\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&a^3-3a^3\ln a+3a\iiint_{[a,1]\times[a,1]}\min\{\frac{a}{x},\frac{a}{y}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iiint_{[a,1]^3}\min\{\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}
\iiint_{[a,1]\times[a,1]}\min\{\frac{a}{x},\frac{a}{y}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=2\iiint_{a\leqslant x\leqslant y\leqslant 1}\frac{a}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-2a\int_a^1\ln x\mathrm{d}x\\
&=2a^2\ln a+2a(1-a).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_{[a,1]^3}\min\{\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 6\iiint_{a\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1}\min\{\frac{a}{x},\frac{a}{y},\frac{a}{z}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= 6\iiint_{a\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1}\frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= 6\int_a^1\frac{a}{z}\frac{1}{2}(z-a)^2\mathrm{d}z\\ &= 3a\int_a^1\frac{(z-a)^2}{z}\mathrm{d}z\\ &= \frac{9a^3}{2}-3a^3\ln a-6a^2+\frac{3a}{2}\end{aligned}$$

因此，原积分等于：

$$\begin{aligned}&a^3-3a^3\ln a+3a(2a^2\ln a+2a(1-a))+\frac{9a^3}{2}-3a^3\ln a-6a^2+\frac{3a}{2}\\ =&\frac{3a}{2}-\frac{a^3}{2}\end{aligned}$$

□

**5.**（本题 14 分）证明：

$$\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^n(\ln x)^n]=1+S_1\ln x+\frac{S_2}{2!}(\ln x)^2+\cdots+\frac{S_n}{n!}(\ln x)^n,$$

其中 $S_p=\sum\limits_{\substack{I\subset\{1,2,\cdots,n\}\\|I|=p}}\prod\limits_{a\in I}a$, 其中 $|I|$ 是 $I$ 的元素个数。

(提示：对

$$x^{n+a}=x^n\left[1+a\ln x+\frac{a^2}{2!}(\ln x)^2+\cdots+\frac{a^n}{n!}(\ln x)^n+\cdots\right]$$

两边求 $n$ 阶导)

证明. 对

$$x^{n+a}=x^n\left[1+a\ln x+\frac{a^2}{2!}(\ln x)^2+\cdots+\frac{a^n}{n!}(\ln x)^n+\cdots\right]$$

两边求 $n$ 阶导，得：

$$(n+a)(n-1+a)\cdots(1+a)x^a=f_0(x)+af_1(x)+\cdots\frac{a^n}{n!}f_n(x)+\cdots,$$

其中 $f_k(x)$ 为关于 $x$ 的函数，而 $f_n(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^n(\ln x)^n]$ 就是我们所要求的。所以：

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{\partial^n}{\partial a^n}\big((n+a)(n-1+a)\cdots(1+a)x^a\big)\bigg|_{a=0} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{\partial^k}{\partial a^k}\bigg|_{a=0} x^a\right]\left[\frac{\partial^{n-k}}{\partial a^{n-k}}\bigg|_{a=0}\big((n+a)(n-1+a)\cdots(1+a)\big)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}}{\partial a^{n-k}}\bigg|_{a=0}\big((n+a)(n-1+a)\cdots(1+a)\big)(\ln x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)!S_k(\ln x)^k \\
&= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k}{k!}(\ln x)^k
\end{aligned}$$

□

6. 证明: 首先有引理: 若 $A$, $B$, $C$, $D$ 均为 $n$ 阶矩阵, 且 $AC=CA$, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-BC|$.

再证本命题：因为 $r(A)=1$, 故存在 $n$ 维非零列向量 $\alpha$, $\beta$, 使得 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$. 又

$$\left|\lambda E-\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} \lambda E & -A \\ -B & \lambda E \end{vmatrix}=\left|\lambda^2 E-AB\right|$$

$$=\left|\lambda^2 E-\alpha\beta^{\mathrm{T}}B\right|=\left|\lambda^2 E-\alpha\left(\beta^{\mathrm{T}}B\right)\right|=\lambda^{2n-2}\left(\lambda^2-\beta^{\mathrm{T}}B\alpha\right),$$

故 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的所有特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{2n-2}=0$, $\lambda_{2n-1}=\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}B\alpha}$, $\lambda_{2n}=-\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}B\alpha}$.

7. 证明：方程无解. 反证法, 若方程有解 $AX_0B=C$, 则 $\mathrm{tr}\left(AX_0B\right)=\mathrm{tr}(C)=\mathrm{tr}\left(BAX_0\right)$. 又 $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=O$, 即 $BA=O$, 故 $1=\mathrm{tr}(C)=\mathrm{tr}\left(BAX_0\right)=0$, 矛盾.