2023 年全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（第二场非数学类）竞赛试题

1.（本题 14 分）设数列 $\{a_n\}_n$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}$ 定义，试证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在并求之。

2.（本题 14 分）设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & 若\ x \neq 0 \\ 0, & 若\ x = 0. \end{cases}$, 求 f 在 0 处的所有高阶导数。

3.（本题 14 分）设 n 为一个固定的正整数，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 试确定所有的满足 $f^{(n)} = f^{(n-1)}$ 的函数 f.

4.（本题 14 分）设 $0 < a < 1$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$ 为单位立方体，计算：

$$\iiint_\Omega \min\{1, \frac{a}{x}, \frac{a}{y}, \frac{a}{z}\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

5.（本题 14 分）证明：

$$\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^n(\ln x)^n] = 1 + S_1 \ln x + \frac{S_2}{2!}(\ln x)^2 + \cdots + \frac{S_n}{n!}(\ln x)^n,$$

其中 $S_p = \sum\limits_{\substack{I\subset\{1,2,\cdots,n\} \\ |I|=p}} \prod\limits_{a\in I} a$, 其中 $|I|$ 是 I 的元素个数。

(提示：对

$$x^{n+a} = x^n \left[1 + a\ln x + \frac{a^2}{2!}(\ln x)^2 + \cdots + \frac{a^n}{n!}(\ln x)^n + \cdots\right]$$

两边求 n 阶导)

6.（本题 15 分）设 A, B 均为 n 阶矩阵，且 $r(A) = 1$, 求矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的所有特征值，其中 O 为零矩阵。

7.（本题 15 分）设 A, B, C 均为 n 阶矩阵，且 $A^T B^T = O$, $\mathrm{tr}(C) = 1$, 判断矩阵方程 $AXB = C$ 是否有解，并证明之。