第三届全国大学生奥林匹克数学竞赛试题（数学类）

一、选择题（每小题 3 分，共 10 小题，满分 30 分）

1.函数 $f(x)=\begin{cases}|x|\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处（　　）.

（A）可导　　（B）连续但不可导　　（C）极限存在但不连续　　（D）极限不存在

【答案】（A）.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}|x|\arctan\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\arctan\frac{1}{x}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$，从而 $f'_+(0)=f'_-(0)$，所以

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.从而答案选（A）.

2.“函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处分别沿 x 轴、y 轴正向和负向的方向导数都存在”是“$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处存在”的（　　）.

（A）充分条件　　（B）必要条件　　（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】（B）.

【解析】因为方向导数只是单侧导数，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处分别沿 x 轴、y 轴正向和负向的方向导数都存在，并且两个相反的方向的方向导数互为相反数，偏导数才存在.而 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处存在必然沿沿 x 轴、y 轴正向和负向的方向导数都存在.从而答案为（B）.

3.设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$，被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的第一卦限部分的外侧，则 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z=$（　　）.

（A）$3\int_0^3\mathrm{d}y\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$　　（B）$2\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$

（C）$3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}r\mathrm{d}r$　　（D）$3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\mathrm{d}r$

【答案】（B）.

【解析】因为柱面为 $x^2+y^2=1$，不能向 xoy 面进行投影，只能向 xoz 或 yoz 面进行投影，

而两个积分值相等，从而答案为（B）.

4.若级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$ 收敛，则 a 的取值范围是（　　）.

（A）$a>0$　　（B）$a>\frac{1}{3}$　　（C）$a>\frac{1}{2}$　　（D）$a>1$

【答案】（C）.

【解析】$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n[n^a-(-1)^n]}{[n^a+(-1)^n][n^a-(-1)^n]}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^a-1}{n^{2a}-1}$,

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^a}{n^{2a}-1}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^a}{n^{2a}-1}$，$a>0$ 时收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-1}{n^{2a}-1}$，$2a>1$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时收敛，答案：（C）.

5.若 $\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（　　）.

（A）$a=\frac{1}{2},b=-1$　（B）$a=-\frac{1}{2},b=-1$　（C）$a=\frac{1}{2},b=1$　（D）$a=-\frac{1}{2},b=1$

【答案】（B）.

【解析】$\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+bx-1}{x^2}+a}=1$，所以

由 e^x 的 Taylor 展开式，得 $b=-1,a=-\frac{1}{2}$.故应选（B）.

6.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）$M>N>K$　（B）$M>K>N$　（C）$K>M>N$　（D）$K>N>M$

【答案】（C）.

【解析】$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x$；令 $f(x)=\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}$，则

$f'(x)=-x\mathrm{e}^{-x}$，当 $x<0$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x>0$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，故 $f(x)\le f(0)=1$，而 $1+\sqrt{\cos x}\ge 1$，故 $K>M>N$，应选（C）.

7.$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$（　　）.

（A）$\sin 1+\cos 1$　（B）$2\sin 1+\cos 1$　（C）$2\sin 1+2\cos 1$　（D）$2\sin 1+3\cos 1$

【答案】（B）.

【解析】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2}{(2n+1)!}$，而

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\bigg|_{x=1}=\cos x\big|_{x=1}=\cos 1\text{；}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\bigg|_{x=1}=2\sin x\big|_{x=1}=2\sin 1\text{.所以}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=2\sin 1+\cos 1$，故应选（B）.

8.设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\mathbf{M}^*$ 为矩阵 $\mathbf{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}\end{pmatrix}^*=$（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}|\mathbf{A}|\mathbf{B}^*&-\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*\\ \mathbf{O}&|\mathbf{B}|\mathbf{A}^*\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}|\mathbf{A}|\mathbf{B}^*&-\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\\ \mathbf{O}&|\mathbf{B}|\mathbf{A}^*\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}|\mathbf{B}|\mathbf{A}^*&-\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*\\ \mathbf{O}&|\mathbf{A}|\mathbf{B}^*\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}|\mathbf{B}|\mathbf{A}^*&-\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\\ \mathbf{O}&|\mathbf{A}|\mathbf{B}^*\end{pmatrix}$

【答案】（D）.

【解析】首先利用初等行变换求矩阵 $\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}\end{pmatrix}$ 的逆：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}&\mathbf{E}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}&\mathbf{O}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathbf{E}&\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{E}&\mathbf{O}&\mathbf{B}^{-1}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathbf{E}&\mathbf{O}&\mathbf{A}^{-1}&-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\\ \mathbf{O}&\mathbf{E}&\mathbf{O}&\mathbf{B}^{-1}\end{pmatrix}\text{，于是}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}\end{pmatrix}^{-1}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}&-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\mathbf{B}|\mathbf{A}^*&-\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\\ \mathbf{O}&|\mathbf{A}|\mathbf{B}^*\end{pmatrix}\text{，故选（D）.}$$

9.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为（　　）.

（A）$y_1^2+y_2^2$　　（B）$y_1^2-y_2^2$　　（C）$y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　（D）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】（B）.

【解析】先令 $z_1=x_1+x_2,z_2=x_1+x_3,z_3=x_3$，那么

$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2-4(z_1-z_2)^2=-3z_1^2-3z_2^2+8z_1z_2=-3\left(z_1-\dfrac{4}{3}z_2\right)^2+\dfrac{7}{3}z_2^2$，于是二次型的正负惯性指数均为 1，选（B）.

10.已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{\gamma}$既可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$（　　）.

（A）$k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　（B）$k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　（C）$k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　（D）$k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.

【答案】（D）.

【解析】令$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-k_3\boldsymbol{\beta}_1-k_4\boldsymbol{\beta}_2$，可以得到关于$k_1,k_2,k_3,k_4$的线性方程组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，对系数矩阵进行初等行变换可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&5&0\\3&1&9&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&1&-2\\0&-5&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$，由此可得

$k_3+k_4=0$，令$k_3=-k$，$k_4=k$，则$\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\beta}_1-k\boldsymbol{\beta}_2=k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}$，选（D）.

二、填空题（每小题4分，共5小题，满分20分）

11.设连续函数$f(x)$满足$f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【解析】

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x+2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

12.已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解，其中$a,b$为常数.若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$，则$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$__________.

【答案】8.

【解析】方程组的增广矩阵为 $\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{pmatrix}$，由题意可知系数矩阵与增广矩阵的秩均为 3，于是 $\left|\overline{\mathbf{A}}\right|=0$.将 $\left|\overline{\mathbf{A}}\right|$ 按照第 4 列展开可得

$$0=\left|\overline{\mathbf{A}}\right|=-\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}+8，从而\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=8.$$

13.以曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 为准线并平行于 $x=y=z$ 的柱面方程为____________.

【答案】$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$ 或 $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=2$.

【解析】方法一：设 (x,y,z) 是柱面上的任意一点, 过该点平行于 $x=y=z$ 的直线与准线的交点为 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$，则 $\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \\ x_0+y_0+z_0=1 \\ x-x_0=y-y_0=z-z_0=t \end{cases}$ 消去 x_0,y_0,z_0,t 得方程为

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0.$$

方法二：直线 $x=y=z$ 与平面垂直，并且过球心 $O(0,0,0)$，且它与平面的交点坐标为 $A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，其中取 $z=1$，则点 $B(0,0,1)$ 为曲线上的点，因此球面与平面相交的圆的半径为 $r=|AB|=\sqrt{\frac{2}{3}}$.所求柱面为以直线 $x=y=z$ 为中心轴的圆柱面，即与中心轴距离相等的点构成的曲面，于是由点到直线的距离公式，令 $P(x,y,z)$ 是柱面上的任意一点，则

$$r=\frac{|\overrightarrow{OP}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|=\sqrt{\frac{2}{3}}$$，即 $|(y-z,z-x,x-y)|=\sqrt{2}$，两边平方，得曲面方程为 $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=2$.

14.设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$ 则 $\iint_D\sqrt{25-(3x+4y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_________.

【答案】$\frac{40}{3}$.

【解析】方法一：令$\begin{cases} u=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y \\ v=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y \end{cases}$，则 $D_1=\left\{(u,v)\mid u^2+v^2\le 1\right\}$，$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ -\dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{vmatrix}=1$，

所以由二重积分换元法，得

$$\iint_D \sqrt{25-(3x+4y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\iint_{D_1}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=5\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}v$$

$$=20\int_0^1\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u=\frac{40}{3}.$$

方法二：令$u=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y$，固定$u$为常数，注意到坐标原点到直线$u=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y$的距离恰好为$|u|$，平行于该直线划分$D$，则面积元素可以取为$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u(|u|\le 1)$，此可得原积分 $=\int_{-1}^{1}\sqrt{25-(5u)^2}\cdot 2\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u=10\int_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u=\dfrac{40}{3}$.

15.设曲面Σ是平面$y+z=4$被柱面$x^2+y^2=25$所截得的部分，则

$\iint_\Sigma (x+y+z)\mathrm{dS}=$_______.

【答案】$100\sqrt{2}\pi$.

【解析】Σ的方程为$z=4-y$，故$\mathrm{dS}=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$在$xOy$平面的投影$D_{xy}:x^2+y^2\le 25$，故$I=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x+4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=100\sqrt{2}\pi$.

三、解答题（每小题 10 分，共 5 小题，满分 50 分）

16.求与平面$2x+3y-5=0$及$y+z=0$平行，与直线$L_1:\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y}{2}=z-1$及

$L_2:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-8}{2}=\dfrac{z+4}{-2}$相交的直线$L$.

【解析】平面$2x+3y-5=0$及$y+z=0$的法向量分别$\overrightarrow{n_1}=(2,3,0)$和$\overrightarrow{n_2}=(0,1,1)$，因为直线$L$同时垂直于$\overrightarrow{n_1}$和$\overrightarrow{n_2}$，所以$L$的方向向量$\vec{\tau}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(3,-2,2)$.现设直线$L$与$L_1$相交于$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，则可写出$L$的参数方程：$x=\overline{x}+3t,y=\overline{y}-2t,z=\overline{z}+2t$.代入$L_2$的方程消去参数$t$得$\overline{y}+\overline{z}=4$.将$\overline{x},\overline{y},\overline{z}$代入$L_1$的方程得$\dfrac{\overline{x}-6}{3}=\dfrac{\overline{y}}{2}=\overline{z}-1$，由此与$\overline{y}+\overline{z}=4$可联

立解得 $\overline{x}=9,\overline{y}=\overline{z}=2$.故 L 的方程为 $\dfrac{x-9}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.

17.设数列 $\{x_n\}$ 定义为 $x_1=1,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2$.

【解析】(1）由数学归纳法得 $0\le x_{n+1}\le x_n\le 1(n=1,2,\cdots)$，即数列单调有界，因此数列 $\{x_n\}$ 极限存在.于是令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对递推数列两端取极限，得 $A=\sin A$.由于

$f'(x)=(x-\sin x)'=1-\cos x>0(0<x<1)$，所以 $A=\sin A$ 有唯一实根 $A=0$.

（2）由 Stolz 定理，得

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2x_n^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2\sin x_n^2}{x_n^2-\sin^2x_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{(x_n-\sin x_n)(x_n+\sin x_n)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{x_n-\sin x_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{\frac{x_n^3}{6}}=3.$$

18.已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，

$f_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，$f(0,y)=y^2+2y$，求 $f(x,y)$ 的极值.

【解析】对 $f_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$ 的两边关于 y 积分，得 $f_x(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+\varphi(x)$，令 $y=0$，并与题设条件比较，可得 $\varphi(x)=x\mathrm{e}^x$.所以 $f_x(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$，两边关于 x 积分，得 $f(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x+\psi(y)$，再由 $f(0,y)=y^2+2y$ 得 $\psi(y)=0$.因此 $f(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x$.进一步，由 $\begin{cases}f_x(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=0,\\ f_y(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x=0,\end{cases}$ 解得

$x=0,y=-1$.因为 $f_{xx}(x,y)=(y+1)^2\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x$，$f_{yy}(x,y)=2\mathrm{e}^x$，所以在驻点 $(0,-1)$ 处，有 $\Delta=B^2-AC=0^2-1\times2=-2<0$，而 $A=1>0$.由此可知，$f(x,y)$ 在点 $(0,-1)$ 处取得极小值 $f(0,-1)=-1$.

19.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2\\-8&-5\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&a\\5&b\end{pmatrix}$ 相似，求满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 的所有的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

【解析】因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，$tr(A)=tr(B)$，可得 $a=-5,b=-6$.由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，

可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1（2 重）.但是 $3-r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})<3$，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化，所以 $\boldsymbol{B}$ 也不能.设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$，即有线性方程组

$\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=0 \\ 5x_1+9x_2+2x_4=0 \\ 8x_1+9x_3+5x_4=0 \\ 8x_2-5x_3-x_4=0 \end{cases}$，解得基础解系：$\xi_1=(-9,5,8,0)^T,\xi_2=(-5,1,0,8)^T$，可得通解为：

$k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1(-9,5,8,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-5,1,0,8)^{\mathrm{T}}=(-9k_1-5k_2,5k_1+k_2,8k_1,8k_2)^{\mathrm{T}}$，令

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -9k_1-5k_2 & 5k_1+k_2 \\ 8k_1 & 8k_2 \end{pmatrix}$，且当 $|P|\neq 0$，即 $k_1+k_2\neq 0$ 时，$\boldsymbol{P}$ 为所求.

20.设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$.求证：

$\int_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x \le 4\int_0^2 (2-x)^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$，并求使上式成为等式的 $f(x)$.

【解析】利用分部积分法

$\int_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x=-\int_0^2 f^2(x)\mathrm{d}(2-x)=(x-2)f^2(x)\Big|_0^2+2\int_0^2(2-x)f(x)f'(x)\mathrm{d}x$

$=2\int_0^2(2-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x$.由 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$2\int_0^2(2-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x \le 2\left(\int_0^2(2-x)^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.于是

$\int_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x \le 4\int_0^2(2-x)^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$.等式成立时应有常数 λ 使得 $(2-x)f'(x)=\lambda f(x)$.

故当 $x\in(0,2)$ 时，有 $\left((2-x)^{\lambda}f(x)\right)'=(2-x)^{\lambda-1}\left((2-x)f'(x)-\lambda f(x)\right)=0$.因而存在常数 c 使得 $f(x)=c(2-x)^{-\lambda}(0<x<2)$.因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，故 $c=0$.于是 $f\equiv 0$.所以使得题中不等式成为等式的函数是 $f(x)\equiv 0$.