2023 年全国大学生奥林匹克数学竞赛（数学类）试题及参考解答

一、选择题（本题共 35 分，共 5 小题，每小题 7 分）

1.极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x^2+\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\cos x+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-2}=$（　　）.

（A）2　（B）3　（C）-2　（D）-3　（E）以上皆不对

解：利用 Taylor 展开公式，有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x^2+\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\cos x+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^{\frac13}+o(x^{\frac13})}{1+o(x^{\frac13})+1+\frac13x^{\frac13}+o(x^{\frac13})-2}=3.$$从而该题选（B）.

2.已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，则 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\dfrac{\pi^2}{6}$　（B）$-\dfrac{\pi^2}{6}$　（C）$\dfrac{\pi^2}{12}$　（D）$-\dfrac{\pi^2}{12}$　（E）以上皆不对

解：利用 Taylor 展开式，有 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$，设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=s$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}=t$，则 $t=\dfrac{\pi^2}{24}$，$s+t=\dfrac{\pi^2}{6}$，从而

$s=\dfrac{\pi^2}{8}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=s-t=\dfrac{\pi^2}{12}$.从而该题选（C）.

3.若四次齐次函数 $f(x,y,z)$ 满足 $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=x^2+y^2+z^2$，则

$\oiint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=$______，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

（A）0　（B）1　（C）$\dfrac{\pi}{15}$　（D）$\dfrac{\pi}{5}$　（E）以上皆不对

解：因为四次齐次函数满足 $f(tx,ty,tz)=t^4f(x,y,z)$，上式两边对 t 求导，得

$xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)=4t^3f(x,y,z)$，令 $t=1$，得

$xf_1'(x,y,z)+yf_2'(x,y,z)+zf_3'(x,y,z)=4f(x,y,z)$，则 $\oiint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$

$=\dfrac14\oiint_{\Sigma}xf_1'(x,y,z)+yf_2'(x,y,z)+zf_3'(x,y,z)\mathrm{d}S$

$=\oiint_{\Sigma} f_1'(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+f_2(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+f_3'(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由 Gauss 公式，

$\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iiint_{\Omega}\left(f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}\right)\mathrm{d}V=\frac{1}{4}\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V=\frac{\pi}{5}$.从而该题选（D）.

4.二重积分 $\iint_D \frac{x}{y^2(1+xy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　），其中 D 是由 $xy=1,xy=3,y^2=x,y^2=3x$ 所围成的区域.

（A）$\frac{2}{9}\ln 2$　　（B）$\frac{1}{3}\ln 2$　　（C）$\frac{4}{9}\ln 2$　　（D）$\frac{2}{3}\ln 2$　　（E）以上皆不对

解：令 $u=xy,v=\frac{y^2}{x}$，则区域 D 对应变为 $D_1=\{1\le u\le 3,1\le v\le 3\}$，且有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{vmatrix}=\frac{3y^2}{x}=3v\Rightarrow\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{3v}$$，于是

$$\iint_D \frac{x}{y^2(1+xy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\frac{1}{v(1+u)}\cdot\left|\frac{1}{3v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\iint_{D_1}\frac{1}{v^2(1+u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$=\frac{1}{3}\int_1^3\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u\int_1^3\frac{1}{v^2}\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\ln 2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\ln 2$.从而该题选（A）.

5.设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{y+3}\left[(x-4)^2+y^2-2y-7\right]$，则（　　）.

（A）$f(x,y)$ 的极大值小于 $4\mathrm{e}^6$

（B）$f(x,y)$ 无极值

（C）$f(x,y)$ 的极小值小于 $4\mathrm{e}^6$

（D）$f(x,y)$ 的极大值大于 $4\mathrm{e}^6$

（E）$f(x,y)$ 的极小值大于 $4\mathrm{e}^6$

解：直接求偏导计算即可.先求驻点 $\begin{cases} f_x=2\mathrm{e}^{y+3}(x-4)=0 \\ f_y=\mathrm{e}^{y+3}[(x-4)^2+y^2-9]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=\pm 3\end{cases}$.再求判断

二阶导：$\begin{cases} A=f_{xx}=2\mathrm{e}^{y+3} \\ B=f_{xy}=2\mathrm{e}^{y+3}(x-4) \\ C=f_{yy}=\mathrm{e}^{y+3}\left[(x-4)^2+y^2+2y-9\right]\end{cases}$，根据系数矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix}$ 判断两个驻

点，对于 $(4,3)$ 有 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^6 & 0 \\ 0 & 6e^6 \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，从而 $(4,3)$ 是一个极小值点且

$f(4,3) = -4e^6 < 4e^6$.对于 $(4,-3)$ 有 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^6 & 0 \\ 0 & -6e^6 \end{vmatrix} < 0$，从而点 $(4,-3)$ 不是极值

点，从而该题选（C）.

二、解答题（本题共 65 分，共 5 小题，每小题 13 分）

1.设 $\alpha > 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha\right)}{\sqrt{1\times 3 + 2\times 4 + \cdots n\times(n+2)}} \sin\dfrac{1}{n^\alpha}$.

解：原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha\right)}{n^\alpha\sqrt{1\times 3 + 2\times 4 + \cdots n\times(n+2)}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(1\times 3 + 2\times 4 + \cdots n\times(n+2))^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{1\times 3 + 2\times 4 + \cdots n\times(n+2)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^\alpha$，注意到：

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{1\times 3 + 2\times 4 + \cdots n\times(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3 - n^3}{\sum\limits_{k=1}^{n+1}k(k+2) - \sum\limits_{k=1}^{n}k(k+2)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+3n+1}{n^2+4n+3} = 3$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{1\times 3 + 2\times 4 + \cdots n\times(n+2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$，又有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 x^\alpha dx$

$= \left.\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \dfrac{1}{\alpha+1}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha\right)}{\sqrt{1\times 3 + 2\times 4 + \cdots n\times(n+2)}} \sin\dfrac{1}{n^\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{\alpha+1}$.

2.设 f 在 $\mathbb{R}$ 上有三阶导数，$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$，并且

$|f'''(x)| \le |f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$.求证：$f \equiv 0$.

证明：由于 f 在 $\mathbb{R}$ 上有三阶导数，故 f, f', f'' 在 $\mathbb{R}$ 上连续.令

$M = \max_{x\in\left[0,\frac{1}{18}\right]}\left\{|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)|\right\} = |f(x_0)| + |f'(x_0)| + |f''(x_0)|$，其中

$x_0 \in \left[0, \dfrac{1}{18}\right]$.由 Taylor 公式知

$$f\left(x_0\right)=f(0)+f'(0)x_0+\frac{f''(0)}{2}x_0^2+\frac{f^{(3)}\left(\xi_1\right)}{6}x_0^3=\frac{f^{(3)}\left(\xi_1\right)}{6}x_0^3,\xi_1\in\left(0,\frac{1}{18}\right),$$

$$f'\left(x_0\right)=f'(0)+f''(0)x_0+\frac{f^{(3)}\left(\xi_2\right)}{2}x_0^2=\frac{f^{(3)}\left(\xi_2\right)}{2}x_0^2,\xi_2\in\left(0,\frac{1}{18}\right),$$

$f''\left(x_0\right)=f''(0)+f^{(3)}\left(\xi_3\right)x_0=f^{(3)}\left(\xi_3\right)x_0,\xi_3\in\left(0,\frac{1}{18}\right)$.因此

$$M=\left|f\left(x_0\right)\right|+\left|f'\left(x_0\right)\right|+\left|f''\left(x_0\right)\right|=\left|\frac{f^{(3)}\left(\xi_1\right)}{6}x_0^3\right|+\left|\frac{f^{(3)}\left(\xi_2\right)}{2}x_0^2\right|+\left|f^{(3)}\left(\xi_3\right)x_0\right|$$

$\le\frac{3}{18}\left(\left|f^{(3)}\left(\xi_1\right)\right|+\left|f^{(3)}\left(\xi_2\right)\right|+\left|f^{(3)}\left(\xi_3\right)\right|\right)\le\frac{1}{6}(M+M+M)=\frac{M}{2}$，故 $M=0$，即

$f(x)\equiv0,x\in\left[0,\frac{1}{18}\right]$.依此类推，易知 $f\equiv0$.

3.设 $0<x_i<\pi,i=1,2,\cdots n$，取 $x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，证明：$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\le\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$.

证明：令 $g(x)=\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\sin x-\ln x$，因为对 $x>0$，有 $\sin x<x$，故对 $0<x<\pi$，有 $g''(x)=-\csc^2x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}<0$，于是 $g(x)$ 的图像是向上凸的，因此有 Jensen 不等式 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g\left(x_i\right)\le g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=g(x)$，故 $\sum_{i=1}^{n}g\left(x_i\right)\le ng(x)$，因为 e^x 是一个递增函数，这就导出 $\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}=e^{\sum_i g(x_i)}\le e^{ng(x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$.

4.证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin2x}{x}dx$ 收敛.

证明：$\left|\int_1^A e^{\sin x}\sin2xdx\right|=\left|2\int_1^A e^{\sin x}\cos x\sin xdx\right|=2\left|\int_1^A\sin xde^{\sin x}\right|$

$=\left|2\sin xe^{\sin x}\Big|_1^A-2\int_1^A e^{\sin x}d\sin x\right|=\left|2\sin xe^{\sin x}-2e^{\sin x}\Big|_1^A\right|=\left|2e^{\sin x}(\sin x-1)\right|\Big|_1^A$

$=\left|2e^{\sin A}(\sin A-1)-2e^{\sin1}(\sin1-1)\right|\le8e$，故 $\int_1^A e^{\sin x}\sin2xdx$ 有界，又因为 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于零，因此由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin2x}{x}dx$ 收敛.

5.（1）设 $\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$ 为两个数列，且 $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$，证明：

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k\left(a_k - a_{k+1}\right)$；（2）已知$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kx_k = A$，证明：

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 x_k = \frac{A}{2}$.

证明：（1）$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(B_k - B_{k-1}\right)$

$= a_n B_n - a_n B_{n-1} + a_{n-1} B_{n-1} - a_{n-1} B_{n-2} + \cdots + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_1 B_1$

$= a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k\left(a_{k+1} - a_k\right)$，即$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k\left(a_k - a_{k+1}\right)$.

（2）由 stolz 定理可知，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kx_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1} kx_k - \sum_{k=1}^{n} kx_k}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)x_{n+1} = A$，所以

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 x_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^2 x_k - \sum_{k=1}^{n} k^2 x_k}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 x_{n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)x_{n+1} = \frac{A}{2}$.