2023 年全国大学生奥林匹克数学竞赛（非数学类）试题及参考解答

一、选择题（本题共 35 分，共 5 小题，每小题 7 分）

1.极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x\ln(1+x)}-\dfrac{2+x}{2x^2}\right]=$（　　）.

（A）$-\dfrac{1}{36}$　　（B）$-\dfrac{1}{24}$　　（C）$-\dfrac{1}{12}$　　（D）$-\dfrac{1}{8}$　　（E）$-\dfrac{1}{6}$

解：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-(2+x)\ln(1+x)}{2x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-(2+x)\ln(1+x)}{2x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\ln(1+x)-\dfrac{2+x}{1+x}}{6x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2}}{12x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{12(1+x)^2}=-\dfrac{1}{12}$，从而该题选（C）.

2.设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\ln(9x+9y+1)+(x+1)y=0$ 所确定的隐函数，则 $y'(0)=$（　　）.

（A）-1　　（B）$\dfrac{9}{10}$　　（C）$-\dfrac{10}{9}$　　（D）$-\dfrac{9}{10}$　　（E）$\dfrac{10}{9}$

解：先求得该点坐标，令 $x=0$ 得 $\ln(9y+1)+y=0\Rightarrow y=0$，两边同时对 x 求导

$\dfrac{9+9y'}{9x+9y+1}+y+(x+1)y'=0$，再令 $x=y=0$，解方程 $\dfrac{9+9y'}{1}+0+y'=0$

$\Rightarrow y'=-\dfrac{9}{10}$，从而该题选（D）.

3.如果曲面 $z=\dfrac{3\lambda}{xy}(\lambda>0)$ 与椭球 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 相切于某点，则 λ 的取值为（　　）.

（A）$\sqrt{\dfrac{10}{3}}$　　（B）$\dfrac{2\sqrt{\dfrac{10}{3}}}{9}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{\dfrac{10}{3}}}{9}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{\dfrac{10}{3}}}{3}$　　（E）$\dfrac{4\sqrt{\dfrac{10}{3}}}{9}$

解：设相切于点 $P(x_0,y_0,z_0)$.那么有 $\begin{cases}x_0y_0z_0=3\lambda\\ \dfrac{x_0^2}{5}+\dfrac{y_0^2}{2}+z_0^2=1\\ (y_0z_0,z_0x_0,x_0y_0)=k\left(\dfrac{2}{5}x_0,y_0,2z_0\right)\end{cases}$，

于是 $\begin{cases}\dfrac{3\lambda}{x_0}=y_0z_0=\dfrac{2}{5}kx_0\\ \dfrac{3\lambda}{y_0}=x_0z_0=ky_0\\ \dfrac{3\lambda}{x_0}=x_0y_0=2kz_0\end{cases}$，从而解得 $\begin{cases}x_0^2=\dfrac{15\lambda}{2k}\\ y_0^2=\dfrac{3\lambda}{k}\\ z_0^2=\dfrac{3\lambda}{2k}\end{cases}$，代入方程 $\dfrac{x_0^2}{5}+\dfrac{y_0^2}{2}+z_0^2=1$，解得

$k=\dfrac{9}{2}\lambda$，从而计算得 $\lambda=\dfrac{x_0y_0z_0}{3}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{(9/2)^3}\times\dfrac{15}{2}\times3\times\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{9}\sqrt{\dfrac{10}{3}}$，从而该题选（C）.

4.已知曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=8(z\geq\sqrt{3})$ 方向取上侧，则曲面积分

$\iint_{\Sigma}2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+5z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）275π　（B）$-\dfrac{275\pi}{2}$　（C）$\dfrac{275\pi}{4}$　（D）$\dfrac{275\pi}{2}$　（E）$-\dfrac{275\pi}{4}$

解：对于第二类曲面积分，直接投影至 xOy 平面即可.

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-8\Rightarrow \mathbf{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)=(2x,2y,2z)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z},$$

从而计算所求积分：$I=\iint_{\Sigma}\left(\dfrac{2x^2y}{z}-\dfrac{y^3}{z}+5z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\left(\dfrac{2x^2y}{z}-\dfrac{y^3}{z}+5z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=5\iint_{D_{xy}}\left(8-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{5}}r^3\mathrm{d}r=\dfrac{275\pi}{2}$，从而该题选（D）.

5.设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，且当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)=2x+\sqrt[3]{1-2x}$，若 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式的和函数，则当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$S(x)=$（　　）.

（A）$-2x-\sqrt[3]{2x-4\pi+1}+4\pi$

（B）$2x-\sqrt[3]{2x-4\pi+1}-4\pi$

（C）$-2x-\sqrt[3]{-2x+4\pi+1}+4\pi$

（D）$2x+\sqrt[3]{2x-4\pi+1}-4\pi$

（E）$2x+\sqrt[3]{-2x+4\pi+1}-4\pi$

解：当 $x\in(-\pi,0)$ 时，$-x\in(0,\pi)$，从而有 $\begin{cases}S(-x)=-2x+\sqrt[3]{1+2x}\\ S(-x)=-S(x)\end{cases}$

$\Rightarrow S(x)=2x-\sqrt[3]{1+2x},x\in(-\pi,0)$，再进一步有，当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，

$x-2\pi\in(-\pi,0)$，从而有 $S(x)=S(x-2\pi)=2x-\sqrt[3]{2x-4\pi+1}-4\pi$，从而该题选（B）.

二、解答题（本题共 65 分，共 5 小题，每小题 13 分）

1.设 $x_1=2, x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n},\cdots$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

解：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$（存在）.对于 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，两边令 $n\to\infty$，取极限

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=2+\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$，即有 $A=2+\dfrac{1}{A}\Rightarrow A^2-2A-1=0$，解得 $A=1\pm\sqrt{2}$.因为

$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}>2$，所以取 $A=1+\sqrt{2}$.

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.对任意 $\varepsilon>0$，$|x_n-A|=\left|\left(2+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\dfrac{1}{A}\right)\right|=\left|\dfrac{1}{x_{n-1}}-\dfrac{1}{A}\right|$

$=\dfrac{|A-x_{n-1}|}{x_{n-1}A}=\dfrac{|x_{n-1}-A|}{x_{n-1}A}<\dfrac{|x_{n-1}-A|}{4}$，（因为 $x_{n-1}=2+\dfrac{1}{x_{n-2}}>2$，所以 $A=2+\dfrac{1}{A}>2$）

$$<\dfrac{\frac{|x_{n-2}-A|}{4}}{4}=\dfrac{|x_{n-2}-A|}{4^2}<\dfrac{\frac{|x_{n-3}-A|}{4}}{4^2}=\dfrac{|x_{n-3}-A|}{4^3}<\cdots<\dfrac{|x_1-A|}{4^{n-1}}=\dfrac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}}$$

$=\dfrac{|1-\sqrt{2}|}{4^{n-1}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}<\varepsilon$（当 n 足够大时）.

2.设 f 二次可微，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)+\dfrac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3$ 成立.

证法一：（原函数用泰勒公式）记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$c=\dfrac{a+b}{2}$，则 $F'(c)=f(c)$，

$F''(c)=f'(c)$，由泰勒公式

$F(a)=F(c)+f(c)(a-c)+\dfrac{1}{2}f'(c)(a-c)^2+\dfrac{1}{6}f''(\eta_1)(a-c)^3,\eta_1\in(a,c)$，

$F(b)=F(c)+f(c)(b-c)+\dfrac{1}{2}f'(c)(b-c)^2+\dfrac{1}{6}f''(\eta_2)(b-c)^3,\eta_2\in(c,b)$，二式相减得

$F(b)-F(a)=f(c)(b-a)+\dfrac{1}{48}\big(f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\big)(b-a)^3$，由达布定理知 $\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)$

使$\frac{1}{2}\left(f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right)=f''(\xi)$，故有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3$.

证法二：（常数K值法）所证结论为f''在(a,b)内中值点ξ取到常数

$K=\left\{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{b+a}{2}\right)(b-a)\right\}/\frac{(b-a)^3}{24}$，结论写作

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)-\frac{K}{24}(b-a)^3=0$.作辅助函数

$F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+t}{2}\right)(t-a)-\frac{K}{24}(t-a)^3$，则$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知存

在$\eta\in(a,b)$，$F'(\eta)=0$.注意$F'(t)=f(t)-f\left(\frac{a+t}{2}\right)-f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\frac{t-a}{2}-\frac{K}{8}(t-a)^2$，

故$f(\eta)-f\left(\frac{a+\eta}{2}\right)-f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\frac{\eta-a}{2}=\frac{K}{8}(\eta-a)^2$，又由泰勒公式知存在

$\xi\in\left(\frac{a+\eta}{2},\eta\right)\subset(a,b)$，使$f(\eta)-f\left(\frac{a+\eta}{2}\right)-f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\frac{\eta-a}{2}=\frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2$，故

$f''(\xi)=K$.

3.给定点$A(1,0,0)$，$B(1,1,1)$，线段AB绕z轴旋转一周所成曲面为S，由S与两平面

$z=0,z=1$所围立体为Ω，求三重积分$I=\iiint_\Omega\left(ax^2+by^2+cz^2\right)\mathrm{d}V$.

解：直线AB的方程为$x=1,y=t,z=t$，从而旋转曲面S的方程的参数方程为

$x=\sqrt{1+t^2}\cos\theta,y=\sqrt{1+t^2}\sin\theta,z=t$，消去参数得旋转曲面的一般式方程

$x^2+y^2=1+z^2$，于是由三重积分的截面法，得

$I=\int_0^1\mathrm{d}z\int_{x^2+y^2\le1+z^2}\left(ax^2+by^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+c\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\iiint_{x^2+y^2\le1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$，由于

$x^2+y^2\le1+z^2$关于x,y变量具有轮换对称，故$I_1=\frac{a+b}{2}\int_0^1\mathrm{d}z\int_{x^2+y^2\le1+z^2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\frac{a+b}{2}\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+z^2}}r^3\mathrm{d}r=\frac{7}{15}\pi(a+b)$，$I_2=c\pi\int_0^1 z^2\left(1+z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{8\pi c}{15}$，故得

$I=\frac{\pi}{15}[7(a+b)+8c]$.

4.讨论 p 取何值时，广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

解：记 $J=\int_0^{+\infty}\frac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$， $J_1=\int_0^1\frac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$， $J_2=\int_1^{+\infty}\frac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$，则广义积分 J 收敛当且仅当 J_1,J_2 都收敛.当 $x\to 0^+$ 时， $\frac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\sim x^p\ln x$，所以 J_1 收敛当且仅当 $p>-1$.当 $x\to+\infty$ 时， $\frac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\sim\frac{\ln x}{x^{4-p}}$，所以 J_2 收敛当且仅当 $p<3$.

综上可知， J 收敛当且仅当 $-1<p<3$.

5.求 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\ln 2\right)$.

解： $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x-\ln 2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}\mathrm{d}x-\ln 2\right)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}.$$