2022-2023年度第二届全国大学生奥林匹克数学竞赛

（非数学类，2022年12月）

一、选择题(本题 35 分，共 5 小题，每小题 7 分)

1. 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2022)-f(2022-x)}{2022x}=-\pi$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(2022,f(2022)\right)$ 处的切线斜率为（　　　）

A. -1011π　B. -2022π　C. $\frac{1}{2022\pi}$　D. 1011π　E. 以上皆否

解：注意到极限运算

$$-\pi=\lim_{x\to 0}\frac{f(2022)-f(2022-x)}{2022x}=\frac{1}{2022}\lim_{x\to 0}\frac{f(2022-x)-f(2022)}{-x}=\frac{1}{2022}f'(2022),$$

解得 $f'(2022)=-2022\pi$.

故选 B.

2．极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2\tan 2x}=$（　　　）

A. e　B. e^{-1}　C. e^{-2}　D. e^{-4}　E. 以上皆否

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2\cdot\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}\cdot\frac{-4\tan x}{\tan x+1}}=e^{-2}.$$

故选 C.

3. 积分 $\iint_{\boldsymbol{R}^2}\min\{x,y\}\,e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=$（　　　）

A. $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$　B. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$　C. $-\frac{\pi}{2}$　D. $\frac{\pi}{2}$　E. 以上皆否

解：$\iint_{\boldsymbol{R}^2}\min\{x,y\}\,e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\iint_{\{x\le y\}}xe^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma+\iint_{\{x\ge y\}}ye^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}xe^{-x^2}e^{-y^2}dxdy=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2y^2}\,dy=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

故选 A.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}}dx$ 的值为（　　　）

A. 0　　　B. $\frac{1}{2}$　　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　D. 1　　　E. 以上皆否

解：由 $0\le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}}\le x^n, 0\le x\le 1$，得

$$0\le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}}\le \int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}\to 0\,(n\to\infty).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}}dx=0.$

故选 A.

5. 设 n 为正整数，则函数 $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 的极值为（　　　）

A. 0　　　B. 1　　　C. -1　　　D. e　　　E. 以上皆否

解：令 $f'(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$

$=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}=0$，得驻点为 $x=0$.

当 n 为偶数时，在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内，$f'(x)<0$，即函数单调减小，故无极值.

当 n 为奇数时，$x<0$ 时，$f'(x)>0$；$x>0$ 时，$f'(x)<0$，即 $x=0$ 为函数的极大值点，故极大值为 $f(0)=1$.

故选 B.

二、解答题（本题 65 分，共 5 小题，每小题 13 分）

6. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$

证：设 $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2\right).$

由拉格朗日中值公式得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2=2\xi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$

其中 $\xi\in\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}},\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

所以　　　$a_n=2\sqrt{n}\xi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$$= 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+\theta}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \quad (0<\theta<1)$$

$$= 2\sqrt{\frac{n}{n+\theta}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$< 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 2.$$

7. 设 $f(x)$ 为在 $[0,2022]$ 上的实值连续函数，且 $f(0)=f(2022)$.

证明：对任意正整数 n，存在 $x_n \in (0,2022)$ 使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.

证：假设对任意 $x\in(0,2022)$，都有 $f(x)<f\left(x+\frac{1}{n}\right)$. 特别地，取 $x_i=\frac{i}{n}$,

其中 $i=0,1,\cdots,2022n-1$，则 $f(0)<f\left(\frac{1}{n}\right)<\cdots<f\left(\frac{2022n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)$

$=f(2022)$，即 $f(0)<f(2022)$ 这与已知条件矛盾.

同理， 假设对意 $x\in(0,2022)$，都有 $f(x)>f\left(x+\frac{1}{n}\right)$. 特别地，取

$x_i=\frac{i}{n}$,

其中 $i=0,1,\cdots,2022n-1$，则 $f(0)>f\left(\frac{1}{n}\right)>\cdots>f\left(\frac{2022n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)=$

$f(2022)$，即 $f(0)>f(2022)$ 这与已知条件矛盾.

故存在 $x_n\in(0,2022)$ 使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.

8. 设 $x_1=1, x_2=\frac{1}{3}$，$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+2x_n}{3}(n=1,2,\ldots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

解：由 $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+2x_n}{3}$ 得 $x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{2}{3}(x_{n+1}-x_n)$ $(n=1,2,\ldots)$.

当 $n\geq 3$ 时，$x_n-x_{n-1}=-\frac{2}{3}(x_{n-1}-x_{n-2})=\left(-\frac{2}{3}\right)^2(x_{n-2}-x_{n-3})$

$$=\cdots=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}(x_2-x_1)=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

故 $x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^k = 1 - \frac{2}{5}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{5}$.

9. 设 $f:(-a,a)\to R$，$(a>1)$ 为连续函数，f 在点 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$，

从而有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. 所以

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(cx)}{2!}x^2=\frac{1}{2}f''(cx)x^2 \quad (0<c<1).$$

又由题设知，$f''(x)$在包含原点的一个小闭区间上连续，故必存在 $M>0$ 使得 $\left|f''(x)\right|\le M$. 所以 $|f(x)|\le \frac{M}{2}x^2$.

令 $x=\frac{1}{n}$，则当 n 充份大时，有 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$.

取 M' 足够大，故有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < M'\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$.

10. 设 $0<S=\sqrt{2022^2+2023^2}<r<R$，$D=\{(x,y)\mid r^2\le x^2+y^2\le R^2\}$.

证明：$\frac{\pi(R^2-r^2)}{R+S}\le\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{(x-2022)^2+(y-2023)^2}}\le\frac{\pi(R^2-r^2)}{r-S}$.

证：因为 $\sqrt{(x-2022)^2+(y-2023)^2}$ 为原点到点 (2022,2023) 的距离，且

环形区域 D 中的点到点 (2022,2023) 的最小距离为 $r-S$，最大距离为 $R+S$，所以对任意的 $(x,y)\in D$，有

$$\frac{1}{R+S}\le\frac{1}{\sqrt{(x-2022)^2+(y-2023)^2}}\le\frac{1}{r-S}.$$

故 $$\frac{1}{R+S}\iint_D d\sigma\le\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{(x-2022)^2+(y-2023)^2}}\le\frac{1}{r-S}\iint_D d\sigma.$$

因为 $\iint_D d\sigma=\pi(R^2-r^2)$，故原不等式成立.