2022 年度第一届全国大学生奥林匹克数学竞赛试题题解

选择题

1. 把正常数 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，其中 n 是正整数。
   （正常数 K 是指 K 是一常数且 $K > 0$）
   （例如当 $K = 9$ 及 $n = 3$ 时，每个数为 $\sqrt[3]{9}$，把它们相加后的和为 $3 \times \sqrt[3]{9}$）

   i. 当 $K = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n(n-1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最小。

   ii. 当 $K = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n(n-1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最大。

   iii. 当 $K = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n(n-1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最小。

   iv. 当 $K = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n(n-1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最大。

   v. 当 $K = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最小。

   vi. 当 $K = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最大。

   vii. 当 $K = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最小。

   viii. 当 $K = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最大。

   以上何者必定正确？

   A. 只有 i
   B. 只有 ii
   C. 只有 iii
   D. 只有 iv
   E. 只有 v
   F. 只有 vi
   G. 只有 vii
   H. 只有 viii

I. 只有 i 和 iii
J. 只有 i 和 v
K. 只有 i 和 vii
L. 只有 iii 和 v
M. 只有 iii 和 vii
N. 只有 v 和 vii
O. 只有 ii 和 iv
P. 只有 ii 和 vi
Q. 只有 ii 和 viii
R. 只有 iv 和 vi
S. 只有 iv 和 viii
T. 只有 vi 和 viii
U. 只有 i、iii、v 和 vii
V. 只有 ii、iv、vi 和 viii
W. 全部均必定正确
X. 以上皆否

答案：L

把正常数 K 写成 n 个相同的数的乘积，则每个数为 $K^{\frac{1}{n}}$，把它们相加的结果为 $nK^{\frac{1}{n}}$

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(nK^{\frac{1}{n}}\right)=0$

$$\Rightarrow K^{\frac{1}{n}}+nK^{\frac{1}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\ln K\right)=0$$

$$\Rightarrow 1-\frac{\ln K}{n}=0$$

$$\Rightarrow n=\ln K$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(nK^{\frac{1}{n}}\right)\begin{cases}<0 & 1\le n<\ln K\\ >0 & n>\ln K\end{cases}$$

然而，n 是正整数，可得当 $nK^{\frac{1}{n}}$ 为最小时，$\lfloor\ln K\rfloor\le n\le\lfloor\ln K\rfloor+1$，其中 $\lfloor\ln K\rfloor$ 为不大于 $\ln K$ 的最大整数。即 $n-1\le\lfloor\ln K\rfloor\le n$，即 $\lfloor\ln K\rfloor=n-1$ 或 $\lfloor\ln K\rfloor=n$。

若写成 $(n-1)$ 个相同的数的乘积，把它们相加的结果等于写成 n 个相同的数的乘积，把它们相加的结果，则

$$(n-1)K^{\frac{1}{n-1}}=nK^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow K^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}=\frac{n}{n-1}$$

$$\Rightarrow K^{\frac{1}{n(n-1)}}=\frac{n}{n-1}$$

$$\Rightarrow K=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n(n-1)}$$

假设若 $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n(n-1)} \le K \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+1)}$，则把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最小。

若要证明以上假设成立，则要证明若 $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n(n-1)} \le K \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+1)}$，

则 $\lfloor \ln K \rfloor = n-1$ 或 $\lfloor \ln K \rfloor = n$。

若 $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n(n-1)} \le K \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+1)}$，

则 $\left\lfloor n(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\rfloor \le \lfloor \ln K \rfloor \le \left\lfloor n(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\rfloor$

现要证明 $\left\lfloor n(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\rfloor = n-1$ 及 $\left\lfloor n(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\rfloor = n$

即要证明 $\left\lfloor n(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\rfloor = n$

即要证明 $n \le n(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < n+1$

即要证明 $\begin{cases} 1 \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < n+1 \end{cases}$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \ln\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \ln e = 1$、$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\right) = \ln\big(e(1+0)\big) = 1$、$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 为递增数列（注 1）、$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 为递减数列（注 2）

即 $1 \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 及 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 1 < n+1$

注 1：证明 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 为递增数列

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

$$=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}$$

$$=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n}\frac{n+2}{n+1}$$

$$=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\ge\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

（注 3；$0<\frac{1}{(n+1)^2}<1$）

注 2：证明 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 为递减数列

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+2}{n+1}$$

$$=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\le\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{n+1}{(n+1)^2}+\right.$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^3}$$

$$= 1 + \frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{(n+1)^3}$$

$$= 1 + \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$> 1$$

即对于任意正整数 n，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\left.\sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^{k}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{k}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{k}$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^4}\right)^{n+1}$$

$$< 1$$

即对于任意正整数 n，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

注 3：证明 $(1-x)^n \geq 1-nx$，其中 $0<x<1$

利用数学归纳法，对 $n=1$，$(1-x)^1 = 1-1x$

对 $n=1$，命题成立。

假设 $(1-x)^k \geq 1-kx$，其中 k 为正整数。

对 $n=k+1$，

$$(1-x)^{k+1}$$
$$\geq (1-kx)(1-x)$$
$$= 1 - x - kx + kx^2$$
$$= 1 - (k+1)x + kx^2$$
$$\geq 1 - (k+1)x$$

对 $n=k+1$，命题成立。

结论：当 $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n(n-1)} \leq K \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)}$ 时，把 K 写成 n 个相同的数的乘积，然后把它们相加，所得的总和为最小。

2. 一边长为 10cm 的正方体，里面的水高 4cm。先后放两个半径为 3cm 的实心球体后（且其密度比水高并不溶于水）。设水面最多升高 h cm，以下哪个是 h 的范围？

A. $0.9 < h < 1.0$

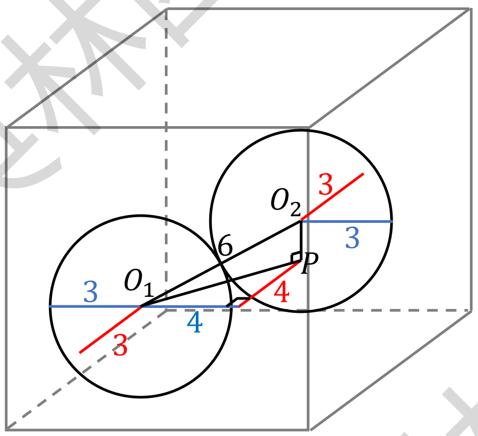
B. $1.0 < h < 1.1$

C. $1.9 < h < 2.0$

D. $2.0 < h < 2.1$

E. 以上皆否

答案：C



$$O_1P = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \Rightarrow O_2P = \sqrt{6^2 - \left(\sqrt{32}\right)^2} = 2$$

$$10^2(h+4) = 10^2(4) + \frac{2}{3}\pi 3^3 + \pi\int_0^{h+1}(9 - x^2)\mathrm{d}x + \pi\int_0^{4+h-2}(9-(x-3)^2)\mathrm{d}x$$

$$100h = \pi\left(18 + 9(h+1) - \frac{(h+1)^3}{3} + \int_0^{h+2}(6x - x^2)\mathrm{d}x\right)$$

$$100h = \pi\left(27 + 9h - \frac{(h+1)^3}{3} + 3(h+2)^2 - \frac{(h+2)^3}{3}\right)$$

$$100h = \pi\left(27 + 9h - \frac{h^3+3h^2+3h+1}{3} + 3h^2 + 12h + 12 - \frac{h^3+6h^2+12h+8}{3}\right)$$

$$100h = \pi\left(\frac{-2h^3 - 9h^2 - 15h - 9}{3} + 3h^2 + 21h + 39\right)$$

$$100h = \pi\left(-\frac{2}{3}h^3 + 16h + 36\right)$$

$$300h = \pi(-2h^3 + 48h + 108)$$

$$2\pi h^3 + (300 - 48\pi)h - 108\pi = 0$$

$$\pi h^3 + (150 - 24\pi)h - 54\pi = 0$$

$$\begin{pmatrix} h = 1.9\colon \pi h^3 + (150-24\pi)h - 54\pi = 285 - 92.741\pi < 0 \\ h = 2.0\colon \pi h^3 + (150-24\pi)h - 54\pi = 300 - 94\pi > 0 \end{pmatrix}$$

$$1.9 < h < 2.0$$

3. 一椭圆的长半轴是短半轴的 3 倍、长半轴的倾角为 $\frac{11\pi}{12}$ 及两半轴相交于 $(-3,2)$。若把椭圆方程写成为 $px^2+qy^2+rxy+sx+ty+u=0$，其中 p、q、r、s、t、u 为常数，则 $\frac{s}{t}$ 的可能值是多少？

A. 1

B. $\frac{4\sqrt{3}-4}{23\sqrt{3}-40}$

C. $\frac{4-4\sqrt{3}}{23\sqrt{3}-40}$

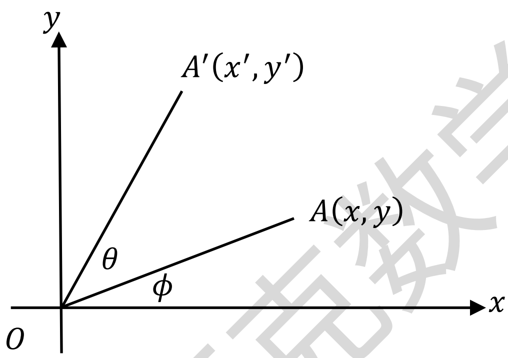
D. $\frac{23\sqrt{3}-40}{4\sqrt{3}-4}$

E. $\frac{23\sqrt{3}-40}{4-4\sqrt{3}}$

F. 以上皆否

答案：D

设 OA 的倾角为 ϕ 及 OA' 的倾角为 $\phi+\theta$。



$$\begin{cases} x = OA\cos\phi \\ y = OA\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = OA'\cos(\theta+\phi) = OA(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = OA'\sin(\theta+\phi) = OA(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

对于长半轴为 a、短半轴为 b、长半轴的倾角为 θ、两半轴相交于 (h,k) 的椭圆，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos t - b\sin\theta\sin t \\ a\sin\theta\cos t + b\cos\theta\sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-h = a\cos\theta\cos t - b\sin\theta\sin t \\ y-k = a\sin\theta\cos t + b\cos\theta\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-h)\tan\theta - (y-k) = -\dfrac{b\sin t}{\cos\theta} \\ (x-h) + (y-k)\tan\theta = \dfrac{a\cos t}{\cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\big((x-h)\tan\theta - (y-k)\big)^2}{\dfrac{b^2}{\cos^2\theta}} + \frac{\big((x-h) + \tan\theta\,(y-k)\big)^2}{\dfrac{a^2}{\cos^2\theta}} = 1$$

当 $\theta = \frac{11\pi}{12}$ 时，$\tan\frac{11\pi}{12} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\tan\frac{\pi}{12}$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$$

$$1-\tan^2\frac{\pi}{12}=2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{12}$$

$$\tan^2\frac{\pi}{12}+2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{12}-1=0$$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-4(-1)}}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$\tan\frac{11\pi}{12}=\sqrt{3}-2$$

$$\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}-2\right)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

代入 $h=-3$、$k=2$、$a=3b$、$\theta=\frac{11\pi}{12}$，可得

$$\frac{\left((x+3)\left(\sqrt{3}-2\right)-(y-2)\right)^2}{b^2\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{\left((x+3)+\left(\sqrt{3}-2\right)(y-2)\right)^2}{(3b)^2\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}=1$$

$$9\left((x+3)\left(\sqrt{3}-2\right)-(y-2)\right)^2+\left((x+3)+\left(\sqrt{3}-2\right)(y-2)\right)^2=9b^2(4)\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$9\left((x+3)^2\left(7-4\sqrt{3}\right)-2(x+3)\left(\sqrt{3}-2\right)(y-2)+(y-2)^2\right)$$
$$+\left((x+3)^2+2(x+3)\left(\sqrt{3}-2\right)(y-2)+\left(7-4\sqrt{3}\right)(y-2)^2\right)=36\left(2-\sqrt{3}\right)b^2$$

$$\left(64-36\sqrt{3}\right)(x+3)^2-16(x+3)\left(\sqrt{3}-2\right)(y-2)+\left(16-4\sqrt{3}\right)(y-2)^2=36\left(2-\sqrt{3}\right)b^2$$

$$\left(64-36\sqrt{3}\right)(x^2+6x+9)+\left(32-16\sqrt{3}\right)(x+3)(y-2)+\left(16-4\sqrt{3}\right)(y^2-4y+4)$$
$$=36\left(2-\sqrt{3}\right)b^2$$

$\frac{s}{t}$

$=\frac{6\left(64-36\sqrt{3}\right)-2\left(32-16\sqrt{3}\right)}{3\left(32-16\sqrt{3}\right)-4\left(16-4\sqrt{3}\right)}$

$=\frac{384-216\sqrt{3}-64+32\sqrt{3}}{96-48\sqrt{3}-64+16\sqrt{3}}$

$=\frac{320-184\sqrt{3}}{32-32\sqrt{3}}$

$=\frac{23\sqrt{3}-40}{4\sqrt{3}-4}$

4. 已知函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对于任意实数 x，$x^3 f(4-3x)+f(3x-3)=3x-7x^5$。

已知 $f(x)=\lim\limits_{m\to-\infty}\sum_{k=m}^{n} a_k x^k$，其中 $a_n\neq 0$ 及 a_k 为常数，k 为不大于 n 的整数。a_n 的值是多少？

A. $-\frac{7}{9}$

B. $-\frac{9}{7}$

C. $\frac{7}{9}$

D. $\frac{9}{7}$

E. 以上皆否

答案：A

设 $y=4-3x$

$x=\frac{4-y}{3}$

$$\left(\frac{4-y}{3}\right)^3 f(y)+f\left(3\left(\frac{4-y}{3}\right)-3\right)=\frac{3(4-y)}{3}-7\left(\frac{4-y}{3}\right)^5$$

$$\left(\frac{(4-y)^3}{27}\right)f(y)+f(1-y)=4-y-7\left(\frac{(4-y)^5}{243}\right)$$

设 $w=1-y$

$$\left(\frac{\left(4-(1-w)\right)^3}{27}\right)f(1-w)+f(w)=4-(1-w)-7\left(\frac{\left(4-(1-w)\right)^5}{243}\right)$$

$$\left(\frac{(3+w)^3}{27}\right)f(1-w)+f(w)=3+w-7\left(\frac{(3+w)^5}{243}\right)$$

$$\left(\frac{(3+y)^3}{27}\right)f(1-y)+f(y)=3+y-7\left(\frac{(3+y)^5}{243}\right)$$

$$f(1-y)=\left(3+y-7\left(\frac{(3+y)^5}{243}\right)-f(y)\right)\frac{27}{(3+y)^3}$$

$$\left(\frac{(4-y)^3}{27}\right)f(y)+\left(3+y-7\left(\frac{(3+y)^5}{243}\right)-f(y)\right)\frac{27}{(3+y)^3}=4-y-7\left(\frac{(4-y)^5}{243}\right)$$

$$\left(\frac{(4-y)^3}{27}-\frac{27}{(3+y)^3}\right)f(y)+\frac{27}{(3+y)^2}-7\left(\frac{(3+y)^2}{9}\right)=4-y-7\left(\frac{(4-y)^5}{243}\right)$$

$$\left(\frac{(4-y)^3}{27}-\frac{27}{(3+y)^3}\right)f(y)=4-y-7\left(\frac{(4-y)^5}{243}\right)-\frac{27}{(3+y)^2}+7\left(\frac{(3+y)^2}{9}\right)$$

$$\mathrm{f}(y)=\frac{\left[4-y-7\left(\frac{(4-y)^5}{243}\right)-\frac{27}{(3+y)^2}+7\left(\frac{(3+y)^2}{9}\right)\right]}{\left(\frac{(4-y)^3}{27}-\frac{27}{(3+y)^3}\right)}\cdot\frac{243(3+y)^3}{243(3+y)^3}$$

$$\mathrm{f}(y)=\frac{243(4-y)(3+y)^3-7(4-y)^5(3+y)^3-6561(3+y)+189(3+y)^5}{9(4-y)^3(3+y)^3-6561}$$

$$a_n=-\frac{7}{9}$$

5. 陷入永久债务的定义是收入在扣除开支后永远无法还清债务。假设

I. 每月开始时先把该月所需开支提款出来及把剩余的款项还债、

II. 当通胀率恒为 0 时每月开支相同、

III. 月债务利率和月通胀率为常数（固定不变）、

IV. 月债务利率和月通胀率以复利息连续计算、

V. 月薪增长率每月计算一次。（例如本年月薪$10 000，月薪增长率为 1%，一个月后月薪为$10 100）

已知开始时债务为 $800 000、月债务利率为 ln 1.04、首月月薪为 $10 000、月薪增长率为 3%、月通胀率为 ln 1.02。为了避免陷入永久债务，首月开支的上限为多少？（答案准确至两位有效数字）

A. $4500

B. $4600

C. $4700

D. $4800

E. 以上皆否

答案：B

设 P_n = 第 $(n+1)$ 月开始时的债务、E_n = 第 $(n+1)$ 月债务以外的总开支、S_n = 第 $(n+1)$ 月的月薪、k = 月薪增长率、r = 月债务利率、f = 月通胀率、$R=e^r$、$F=e^f$、$K=(1+k)$。

$E_n = E_{n-1}F = E_{n-2}F^2 = \cdots = E_0F^n$

$S_n = S_{n-1}K = S_{n-2}K^2 = \cdots = S_0K^n$

$P_n = (P_{n-1} + E_{n-1} - S_{n-1})R = P_{n-1}R + E_0F^{n-1}R - S_0K^{n-1}R$

$P_1 = P_0R + E_0R - S_0R$

$P_2 = P_1R + E_0FR - S_0KR = P_0R^2 + E_0R^2 - S_0R^2 + E_0FR - S_0KR$

$\quad = P_0R^2 + E_0R(R+F) - S_0R(R+K)$

$P_3 = P_2R + E_0F^2R - S_0K^2R = P_0R^3 + E_0R^2(R+F) - S_0R^2(R+K) + E_0F^2R - S_0K^2R$

$\quad = P_0R^3 + E_0R(R^2+RF+F^2) - S_0R(R^2+RK+K^2)$

证明：$P_n = P_0R^n + E_0R\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}F^k - S_0R\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}K^k$ 对于任意正整数 n

已证当 $n=1$ 时命题成立

假设 $P_m = P_0R^m + E_0R\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-1-k}F^k - S_0R\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-1-k}K^k$，其中 m 为正整数

对 $n=m+1$，

$$\begin{aligned}
P_{m+1} &= P_mR + E_0F^mR - S_0K^mR \\
&= (P_0R^m + E_0R\textstyle\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-1-k}F^k - S_0R\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-1-k}K^k)R + E_0F^mR - S_0K^mR \\
&= P_0R^{m+1} + E_0R^2\textstyle\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-1-k}F^k - S_0R^2\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-1-k}K^k + E_0F^mR - S_0K^mR \\
&= P_0R^{m+1} + E_0R(R\textstyle\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-1-k}F^k + F^m) - S_0R(R\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-1-k}K^k + K^m) \\
&= P_0R^{m+1} + E_0R(\textstyle\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-k}F^k + F^m) - S_0R(\sum_{k=0}^{m-1}R^{m-k}K^k + K^m) \\
&= P_0R^{m+1} + E_0R\textstyle\sum_{k=0}^{m}R^{m-k}F^k - S_0R\sum_{k=0}^{m}R^{m-k}K^k
\end{aligned}$$

对 $n=m+1$，命题成立

根据数学归纳法，以上证明成立

$$P_n \geq P_{n-1}$$

$$P_0R^n+E_0R\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}F^k-S_0R\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}K^k\geq P_0R^{n-1}+E_0R\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}F^k-S_0R\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}K^k$$

$$P_0R^{n-1}+E_0\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}F^k-S_0\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}K^k\geq P_0R^{n-2}+E_0\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}F^k-S_0\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}K^k$$

$$E_0\left(\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}F^k-\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}F^k\right)\geq P_0R^{n-2}(1-R)+S_0\left(\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}K^k-\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}K^k\right)$$

$$E_0\geq\frac{P_0R^{n-2}(1-R)+S_0(\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}K^k-\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}K^k)}{\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}F^k-\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}F^k}$$

若$\frac{F}{R}=x$，则$F=xR$。若$\frac{K}{R}=y$，则$K=yR$。

$$E_0\geq\frac{P_0R^{n-2}(1-R)+S_0\left(\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}(yR)^k-\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}(yR)^k\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}R^{n-1-k}(xR)^k-\sum_{k=0}^{n-2}R^{n-2-k}(xR)^k}$$

$$=\frac{P_0R^{n-2}(1-R)+S_0\left(R^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}y^k-R^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}y^k\right)}{R^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}x^k-R^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}x^k}$$

$$=\frac{P_0(1-R)+S_0\left(R\sum_{k=0}^{n-1}y^k-\sum_{k=0}^{n-2}y^k\right)}{R\sum_{k=0}^{n-1}x^k-\sum_{k=0}^{n-2}x^k}$$

$$=\frac{P_0(1-R)+S_0\left(Ry^{n-1}+R\sum_{k=0}^{n-2}y^k-\sum_{k=0}^{n-2}y^k\right)}{Rx^{n-1}+R\sum_{k=0}^{n-2}x^k-\sum_{k=0}^{n-2}x^k}$$

$$=\frac{P_0(1-R)+S_0\left(Ry^{n-1}+(R-1)\sum_{k=0}^{n-2}y^k\right)}{Rx^{n-1}+(R-1)\sum_{k=0}^{n-2}x^k}$$

若$F<K<R$，则$x<y<1$，即$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-2}x^k=\frac{1}{1-x}$及$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-2}y^k=\frac{1}{1-y}$。即

$$E_0\geq\frac{P_0(1-R)+S_0\left(Ry^{n-1}+\frac{R-1}{1-y}\right)}{Rx^{n-1}+\frac{R-1}{1-x}}=\frac{P_0(1-R)(1-x)(1-y)+S_0(1-x)\left(Ry^{n-1}(1-y)+R-1\right)}{Rx^{n-1}(1-x)(1-y)+(R-1)(1-y)}$$

即$E_0>\lim_{n\to\infty}\frac{P_0(1-R)(1-x)(1-y)+S_0(1-x)\left(Ry^{n-1}(1-y)+R-1\right)}{Rx^{n-1}(1-x)(1-y)+(R-1)(1-y)}$

$$=\frac{P_0(1-R)(1-x)(1-y)+S_0(1-x)(R-1)}{(R-1)(1-y)}$$

$$=\frac{-P_0(1-x)(1-y)+S_0(1-x)}{(1-y)}$$

$$=\frac{(1-x)\left(S_0-P_0(1-y)\right)}{1-y}$$

即$E_0>\frac{\left(1-\frac{F}{R}\right)\left(S_0-P_0\left(1-\frac{K}{R}\right)\right)}{1-\frac{K}{R}}=\frac{(R-F)\left(S_0R-P_0(R-K)\right)}{R(R-K)}$

即若陷入永久债务，则

$$\text{首月开支}>\frac{\left(e^{\text{月债务利率}}-e^{\text{月通胀率}}\right)\left(\text{首月月薪}e^{\text{月债务利率}}-\text{开始时的债务}\left(e^{\text{月债务利率}}-(1+\text{月薪增长率})\right)\right)}{e^{\text{月债务利率}}\left(e^{\text{月债务利率}}-(1+\text{月薪增长率})\right)}$$

为了避免陷入永久债务，首月开支的上限为

$$\frac{\left(e^{\ln 1.04}-e^{\ln 1.02}\right)\left(10000e^{\ln 1.04}-800000\left(e^{\ln 1.04}-(1+3\%)\right)\right)}{e^{\ln 1.04}\left(e^{\ln 1.04}-(1+3\%)\right)}\approx 4600$$

简答题

6. 已知 $15x^4+43x^3-12x^2-84x+a+20$ 及 $20x^4+39x^3-93x^2-200x+a$ 的最大公因式为三次多项式，其中 a 为一常数，写出 a 的其中一个可能值。

答案：-36

$$
\begin{array}{r|c|l}
15x^4+43x^3-12x^2-84x+a+20 & \times\frac{3}{4} & 20x^4+39x^3-93x^2-200x+a \\
15x^4+29.25x^3-\dfrac{279}{4}x^2-150x+\dfrac{3a}{4} & \times\frac{16}{11}x & 20x^4+84x^3+96x^2+\dfrac{4a}{11}x+\dfrac{320}{11}x \\
\hline
13.75x^3+\dfrac{231}{4}x^2+66x+\dfrac{a}{4}+20 & \times\left(-\frac{11}{36}\right) & -45x^3-189x^2-\dfrac{4a}{11}x-\dfrac{2520}{11}x+a \\
13.75x^3+\dfrac{231}{4}x^2+\dfrac{a}{9}x+70x-\dfrac{11a}{36} & & \\
\hline
-\dfrac{a}{9}x-4x+\dfrac{5a}{9}+20 & &
\end{array}
$$

由于 $15x^4+43x^3-12x^2-84x+a+20$ 及 $20x^4+39x^3-93x^2-200x+a$ 的最大公因式为三次多项式，可得 $-\frac{a}{9}-4=0$ 及 $\frac{5a}{9}+20=0$

$$a=-36$$

注：最大公因式为 $(x+2)^2(5x+1)=(x^2+4x+4)(5x+1)=5x^3+21x^2+24x+4$、最小公倍式为 $(x+2)^2(5x+1)(3x-4)(4x-9)$

7. 班上 10 名同学，每人掷一颗公平骰子一次，骰子的六个面分别写上由 1 至 6 的整数。你和三位朋友每人说一个整数（四个人中每个人都能听到另外三个人报的数），不得重复，谁说的数最接近十次掷骰子所得到的费波那契数（$F(n)=\begin{cases} n & n=0,1 \\ F(n-1)+F(n-2) & n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}\end{cases}$）数量便胜利。若有二人同等接近，则重头再来，每人说的次序相同。已知你的对手均会采用对他自己最有利的策略。为了有最大的获胜机会，你愿意当第几个报数的参赛者？你说的数是什么？

答案：第一个，说 8

$F(2)=F(1)+F(0)=1+0=1$

$F(3)=F(2)+F(1)=1+1=2$

$F(4)=F(3)+F(2)=2+1=3$

$F(5)=F(4)+F(3)=3+2=5$

费波那契数有 1、2、3、5

有 r 个费波那契数的概率 $=C_{10}^{r}\left(\frac{2}{3}\right)^{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r}$，其中 $r=0,1,2,\ldots,10$。

费波那契数数量	概率	概率
10	$1024/3^{10}$	$17664/3^{10}$
9	$5120/3^{10}$	
8	$11520/3^{10}$	
7	$15360/3^{10}$	$15360/3^{10}$
6	$13440/3^{10}$	$13440/3^{10}$
5	$8064/3^{10}$	$12585/3^{10}$
4	$3360/3^{10}$	
3	$960/3^{10}$	
2	$180/3^{10}$	
1	$20/3^{10}$	
0	$1/3^{10}$	

每人的最佳策略为：

第一个说 8，其获胜概率 $=\frac{17664}{3^{10}}$；第二个说 7，其获胜概率 $=\frac{15360}{3^{10}}$；

第三个说 6，其获胜概率 $=\frac{13440}{3^{10}}$；第四个说 5，其获胜概率 $=\frac{12585}{3^{10}}$

8. 小明声称“若 $s=a+bi$ 及 $t=c+di$，其中 a、b、c、d 为非零实数，$i=\sqrt{-1}$，则 $s^t=u+vi$，其中 u、v 为非零实数。" 小明的声称是否正确？如正确请证明，如错误请给一例子。

$s=a+bi=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$，其中 $\tan\theta=\frac{b}{a}$。

$$
\begin{aligned}
&s^t\\
&=(a+bi)^{c+di}\\
&=\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}\right]^{c+di}\\
&=(a^2+b^2)^{\frac{c+di}{2}}e^{i\theta(c+di)}\\
&=(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}e^{-d\theta}(a^2+b^2)^{\frac{d}{2}i}e^{i(c\theta)}\\
&=(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}e^{-d\arctan\frac{b}{a}}e^{i\left(\frac{d}{2}\ln(a^2+b^2)+c\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right)}
\end{aligned}
$$

当 $d=2$，$c=-1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{2}\ln(a^2+b^2)+c\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\\
&=\ln(a^2+b^2)-\arctan\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

令 $a^2+b^2=x$ 及 $\frac{b}{a}=x$，可得 $\begin{cases}a=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}\\ b=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$。

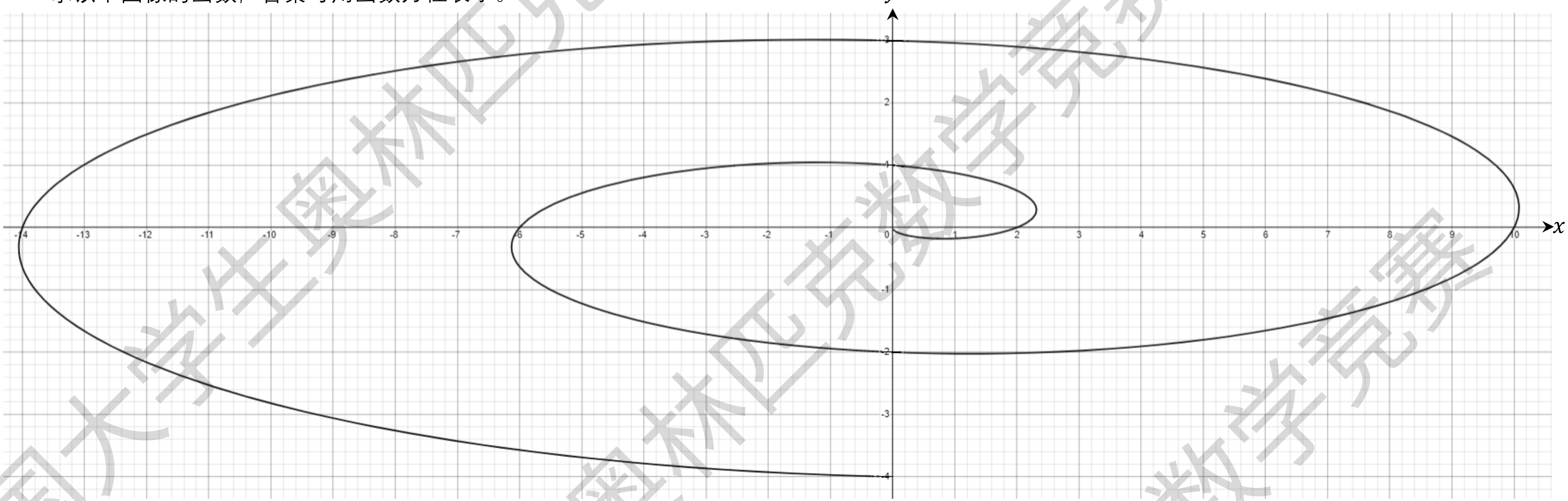
设 $f(x)=\ln(x)-\arctan(x)$

对于 $x>0$，$\ln(x)\in(-\infty,\infty)$、$0<\arctan(x)<\frac{\pi}{2}$、$\ln(x)$ 及 $\arctan(x)$ 均为连续函数。

当 x 增加时 $\ln(x)$ 及 $\arctan(x)$ 均增加。
可得存在一 x_0 使得 $f(x_0)=0$。

即当 $a=\sqrt{\frac{x_0}{1+x_0^2}}$，$b=\frac{x_0\sqrt{x_0}}{\sqrt{1+x_0^2}}$，$c=-1$，$d=2$ 时，$s^t=x_0^{\frac{-1}{2}}e^{-2\arctan x_0}$，为实数，与 v 为非零实数存在矛盾。
小明的声称不正确。

9. 求以下图像的函数，答案可用函数方程表示。



答案：$y=\mathrm{f}(x)$，其中 $\mathrm{f}(x)=\begin{cases}2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}-\frac{\arctan\left(\frac{x}{4\mathrm{f}(x)}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}} & x\le 0, k=1,2\\ -2\sqrt{\left(\frac{\arctan\left(\frac{x}{4\mathrm{f}(x)}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}} & x>0\\ -2\sqrt{\left(1-\frac{\arctan\left(\frac{x}{4\mathrm{f}(x)}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}} & x\ge 0\end{cases}$ 、$x=\mathrm{g}(y)$，其中 $g(y)=\begin{cases}8\sqrt{\left(k-\frac{3}{4}+\frac{\arctan\left(\frac{4y}{\mathrm{g}(y)}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}} & y\ge 0, k=1,2\\ -8\sqrt{\left(k-\frac{1}{4}+\frac{\arctan\left(\frac{4y}{\mathrm{g}(y)}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}} & y\le 0, k=1,2\end{cases}$

设 $\theta=\arctan\frac{4y}{x}$，可得 $\tan\theta=\frac{4y}{x}\Rightarrow\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{x}{4y}\Rightarrow\frac{\pi}{2}+\theta=-\arctan\frac{x}{4y}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{4y}\Rightarrow\arctan\frac{4y}{x}=-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{4y}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{4y}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & y>0\\ -\frac{\pi}{2} & y<0\end{cases}$、$\lim\limits_{y\to0^+}\arctan\frac{x}{4y}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>0\\ -\frac{\pi}{2} & x<0\end{cases}$、$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{4y}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & y<0\\ -\frac{\pi}{2} & y>0\end{cases}$ 及 $\lim\limits_{y\to0^-}\arctan\frac{x}{4y}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & y<0\\ -\frac{\pi}{2} & y>0\end{cases}$

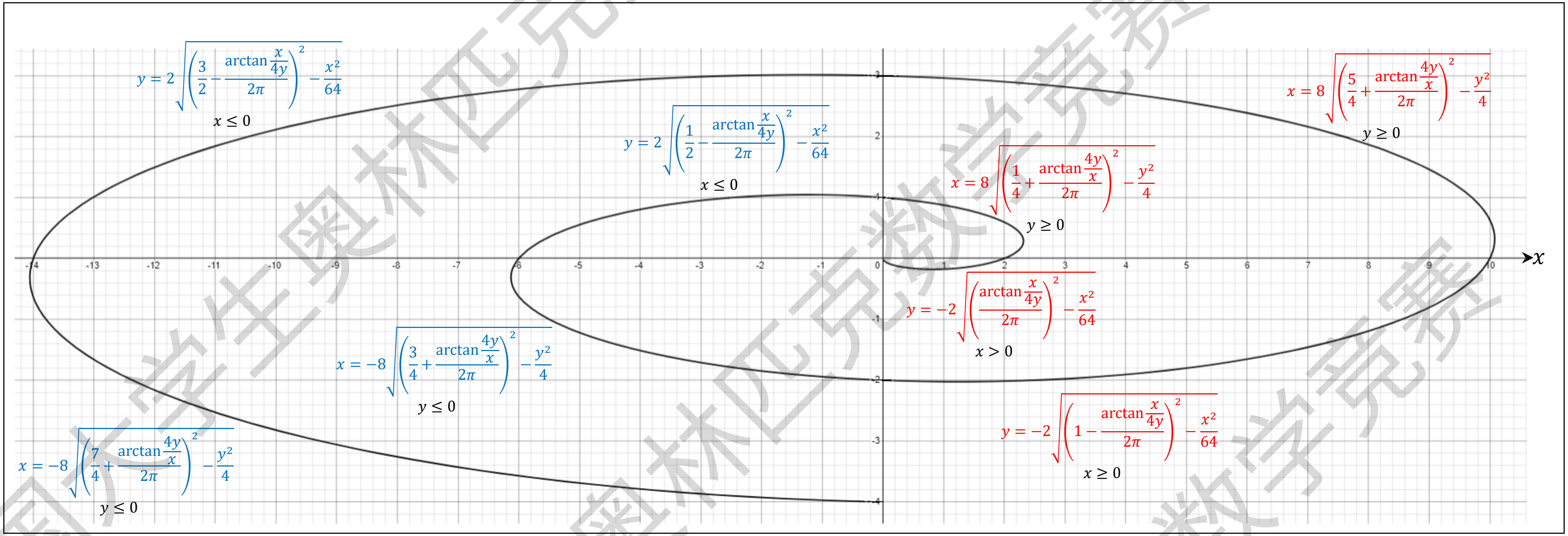
这里问的是函数，所以答案必须是以函数形式，因此须把方程分拆成八个函数

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(k-\frac{\frac{3\pi}{2}-\arctan\left(\frac{4y}{x}\right)}{2\pi}\right)^2,k=1,2\Rightarrow\begin{cases}y=-2\sqrt{\left(k-1-\frac{\arctan\left(\frac{x}{4y}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}} & x\geq 0,k=1,2\ (\text{象限 IV})\\ x=8\sqrt{\left(k-\frac{3}{4}+\frac{\arctan\left(\frac{4y}{x}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}} & y\geq 0,k=1,2\ (\text{象限 I})\end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(k-\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{4y}{x}\right)}{2\pi}\right)^2,k=1,2\Rightarrow\begin{cases}y=2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}-\frac{\arctan\left(\frac{x}{4y}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}} & x\leq 0,k=1,2\ (\text{象限 II})\\ x=-8\sqrt{\left(k-\frac{1}{4}+\frac{\arctan\left(\frac{4y}{x}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}} & y\leq 0,k=1,2\ (\text{象限 III})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=\begin{cases}2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}-\frac{\arctan\left(\frac{x}{4y}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}} & x\leq 0,k=1,2\ (\text{象限 II})\\ -2\sqrt{\left(k-1-\frac{\arctan\left(\frac{x}{4y}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}} & x\geq 0,k=1,2\ (\text{象限 IV})\end{cases}\\ x=\begin{cases}8\sqrt{\left(k-\frac{3}{4}+\frac{\arctan\left(\frac{4y}{x}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}} & y\geq 0,k=1,2\ (\text{象限 I})\\ -8\sqrt{\left(k-\frac{1}{4}+\frac{\arctan\left(\frac{4y}{x}\right)}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}} & y\leq 0,k=1,2\ (\text{象限 III})\end{cases}\end{cases}$$

除去 (0,0) 后可得以上答案。


$y=2\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{\arctan\frac{x}{4y}}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}}$
$x\le 0$
$y=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\arctan\frac{x}{4y}}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}}$
$x\le 0$
$x=8\sqrt{\left(\frac{5}{4}+\frac{\arctan\frac{4y}{x}}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}}$
$y\ge 0$
$x=8\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{\arctan\frac{4y}{x}}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}}$
$y\ge 0$
$y=-2\sqrt{\left(\frac{\arctan\frac{x}{4y}}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}}$
$x>0$
$x=-8\sqrt{\left(\frac{3}{4}+\frac{\arctan\frac{4y}{x}}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}}$
$y\le 0$
$y=-2\sqrt{\left(1-\frac{\arctan\frac{x}{4y}}{2\pi}\right)^2-\frac{x^2}{64}}$
$x\ge 0$
$x=-8\sqrt{\left(\frac{7}{4}+\frac{\arctan\frac{4y}{x}}{2\pi}\right)^2-\frac{y^2}{4}}$
$y\le 0$
x

10. 求 $\sum_{m=5}^{\infty}\frac{m}{5^{m-1}}\sum_{k_1=0}^{m-5}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}2^{k_3}3^{k_2-k_3}4^{k_1-k_2}$ 的值。

（可考虑以下情境以作解此题目提示：一款手机游戏内有数款不同的精灵，玩家每次只可抽一款，每次抽中任何一款的机会相同。）

答案：$\frac{137}{288}$ 或 $0.47569\dot{4}$

考虑以下问题：一款手机游戏内有 5 款不同的精灵，玩家每次只可抽一款，每次抽中任何一款的机会相同。求集齐 5 款精灵所需次数的期望值。

集齐 5 款所需次数	发生概率
1	0
2	0
3	0
4	0
5	$\frac{4!}{5^4}$
6	$\frac{4!}{5^5}(1+2+3+4)$
7	$\frac{4!(1+2+3+4+2^2+2\times3+2\times4+3^2+3\times4+4^2)}{5^6}$
8	$\frac{4!(1+2+3+4+2^2+2\times3+2\times4+3^2+3\times4+4^2+2^3+2^2\times3+2^2\times4+2\times3^2+2\times3\times4+2\times4^2+3^3+3^2\times4+3\times4^2+4^3)}{5^7}$
m	$\frac{4!}{5^{m-1}}\sum_{k_1=0}^{m-5}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}2^{k_3}3^{k_2-k_3}4^{k_1-k_2}$

集齐 5 款精灵所需次数的期望值公式为 $\sum_{m=5}^{\infty}\frac{m(4!)}{5^{m-1}}\sum_{k_1=0}^{m-5}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}2^{k_3}3^{k_2-k_3}4^{k_1-k_2}$。

另一方面，可假设 $E(\text{已有}m)$ 为你已有 m 款精灵时，集齐 5 款精灵的期望值，其中 $0\le m<5$。

$E(\text{已有 }0)=1+E(\text{已有 }1)$

$E(\text{已有 }1)=1+\frac{4}{5}E(\text{已有 }2)+\frac{1}{5}E(\text{已有 }1)$

$E(\text{已有 }2)=1+\frac{3}{5}E(\text{已有 }3)+\frac{2}{5}E(\text{已有 }2)$

$E(\text{已有 }3) = 1 + \frac{2}{5}E(\text{已有 }4) + \frac{3}{5}E(\text{已有 }3)$

$E(\text{已有 }4) = 1 + \frac{1}{5}E(\text{已有 }5) + \frac{4}{5}E(\text{已有 }4)$

$E(\text{已有 }5) = 0$

经计算，可得集齐 5 款精灵所需次数的期望值为 $\frac{137}{12}$，即 $\sum_{m=5}^{\infty}\frac{m(4!)}{5^{m-1}}\sum_{k_1=0}^{m-5}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}2^{k_3}3^{k_2-k_3}4^{k_1-k_2} = \frac{137}{12}$

$$\Rightarrow \sum_{m=5}^{\infty}\frac{m}{5^{m-1}}\sum_{k_1=0}^{m-5}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}2^{k_3}3^{k_2-k_3}4^{k_1-k_2} = \frac{25}{3} \div 4! = \frac{137}{288}$$