第三届全国大学生奥林匹克数学竞赛

（数学类）

比赛纲要

数学分析部分

一、集合与函数

1. 关于实数集的一些基本定理(确界存在性定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理、闭矩形套定理、聚点定理、有限覆盖定理)。

2. 函数、映像、变换的概念。

3. 隐函数、反函数与逆变换的概念，反函数存在性定理。

二、极限与连续

1. 数列极限、收敛数列的基本性质。

2. 一元函数极限的定义、函数极限的基本性质及计算。

3. Cauchy收敛准则。

4. 无穷小量与无穷大量、阶的比较。

5. 多元函数的重极限与累次极限概念及性质。

6. 函数的连续性、一致连续性，连续函数的局部性质，有界闭集上连续函数的性质。

三、一元函数微分学

1. 导数的计算，可微与可导的关系。

2. 微分学的基本定理(Fermat定理，Rolle定理，Lagrange定理，Cauchy定理，Taylor公式)。

3. 函数单调性的判别、极值、最大值和最小值、凸函数及其应用、曲线的凹凸性、拐点、渐近线、函数图像的讨论、洛必达(L' Hospital)法则、近似计算。

四、一元函数积分学

1. 不定积分的基本计算方法。

2. 定积分的可积条件、可积函数类。

3. 定积分的性质、变上限积分函数

4. 微分学的基本定理(微积分基本定理、Newton-Leibniz公式及定积分计算、定积分第二中值定理)。

5. 广义积分的收敛性判别法。

五、 常微分方程

1. 常微分方程的基本概念。

2. 分离变数法、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利(Bernoulli)方程、可降级的高阶微分方程。

3. 线性微分方程解的性质及解的结构定理。

4. 常系数齐次线性微分方程。

5. 常系数非齐次线性微分方程。

6. 欧拉方程。

7. 微分方程的简单应用。

六、 向量代数和空间解析几何

1. 向量的概念与运算、向量的数量积和矢量积、向量的混合积。

2. 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程。

3. 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离。

4. 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程、常用的二次曲面方程及其图形。

5. 空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

七、多元函数微分学

1. 偏导数、全微分及其几何意义，可微与偏导存在、连续之间的关系。

2. 复合函数的偏导数与全微分。

3. 一阶微分形式不变性，方向导数与梯度，高阶偏导数，混合偏导数与顺序无关性，二元函数中值定理与Taylor公式。

4. 隐函数存在定理、隐函数组存在定理、隐函数(组)求导方法、反函数组与坐标变换。

5. 几何应用。

6. 极值问题，条件极值与Lagrange乘数法。

八、多元函数积分学

1. 二重积分及其几何意义、二重积分的计算。

2. 三重积分、三重积分计算。

3. 重积分的应用。

4. 含参量正常积分及其连续性、可微性、可积性，运算顺序的可交换性。

5. 含参量广义积分的一致收敛性及其判别法，含参量广义积分的连续性、可微性、可积性，运算顺序的可交换性。

6. 第一型曲线积分、曲面积分的概念、基本性质、计算。

7. 第二型曲线积分概念、性质、计算，Green公式，平面曲线积分与路径无关的条件。

8. 曲面的侧、第二型曲面积分的概念、性质、计算，Gauss公式、Stoke公式，两类线积分、两类面积分之间的关系。

九、无穷级数

1. 级数及其敛散性，级数的和，Cauchy准则，收敛的必要条件，收敛级数基本性质。

2. 正项级数收敛的充分必要条件，比较原则、比式判别法、根式判别法以及它们的极限形式。

3. 交错级数的Leibniz判别法。

4. 一般项级数的绝对收敛、条件收敛性、Abel判别法、Dirichlet判别法。

5. 级数的绝对收敛与条件收敛。

6. 函数列与函数项级数的一致收敛性、Cauchy准则、一致收敛性判别法、一致收敛函数列、函数项级数的性质及其应用。

7. 幂级数概念、Abel定理、收敛半径与区间，幂级数的一致收敛性。

8. 幂级数的逐项可积性、可微性及其应用。

9. 幂级数各项系数与其和函数的关系、函数的幂级数展开、Taylor级数、Maclaurin级数。

10. 函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数、狄利克雷(Dirichlet)定理、函数在[-l, l]上的傅里叶级数、函数在[0, l]上的正弦级数和余弦级数。

11. 三角函数系的正交性、周期函数的Fourier级数展开、 Bessel不等式、Riemann-Lebesgue定理、按段光滑函数的Fourier级数的收敛性定理。

线性代数部分

一、 行列式

1. 行列式的概念、基本性质及计算。
2. 行列式按行(列) 展开定理，行列式的计算。
3. 范德蒙德(Vandermonde) 行列式，行列式的乘法规则。

二、 矩阵

1. 矩阵的概念及运算，单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质。

2. 矩阵的线性运算、矩阵乘法、矩阵转置以及它们的运算规律，方阵的乘方与方阵乘积的行列式及其性质、矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系。

3. 逆矩阵的概念与性质、矩阵可逆的充分必要条件，可逆矩阵与伴随矩阵的关系。

4. 矩阵的初等变换、初等矩阵的性质、矩阵的等价、矩阵的秩，用初等变换求矩阵的秩和求逆矩阵的方法。

5. 分块矩阵及其运算与性质。

三、 向量

1. n 维向量、向量的线性组合与线性表示。
2. 向量组线性相关与线性无关的判别方法。
3. 向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念。
4. 向量组的等价，矩阵的秩与其行(列) 向量组的秩之间的关系。
5. n 维向量空间、子空间、基底、维数、向量的坐标。
6. 基变换与坐标变换，过渡矩阵。
7. 内积的概念，线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法。
8. 规范正交基、正交矩阵的概念与性质。

四、 线性方程组

1. 高斯(Gauss)消元法、线性方程组的初等变换、线性方程组的一般解。
2. 克拉默(Cramer) 法则。
3. 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件，非齐次线性方程组有解的充

分必要条件，线性方程组解的结构。

4. 齐次线性方程组的基础解系和通解。
5. 非齐次线性方程组解的结构及通解。

五、 矩阵的特征值和特征向量

1. 矩阵的特征值和特征向量。
2. 相似矩阵的概念与性质，相似对角矩阵。

六、 二次型

1. 二次型及其矩阵表示，二次型的秩，合同矩阵与合同变换。
2. 正定二次型、正定矩阵及其判别法。
3. 正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵 。

解析几何部分

一、向量与坐标

1. 向量线性运算。
2. 坐标系的概念、向量与点的坐标及向量的代数运算。
3. 向量在轴上的射影及其性质、方向余弦、向量的夹角。
4. 向量的数量积、矢量积和混合积的计算方法及应用。
5. 向量的应用。

二、轨迹与方程

1. 曲面的普通方程、参数方程及其关系。
2. 空间曲线方程的普通形式、参数方程形式及其关系。
3. 球面的标准方程和一般方程，柱面方程。

三、平面与空间直线

1. 平面方程、直线方程的各种形式。
2. 平面与平面、直线与直线、平面与直线间的位置关系。
3. 点、平面、直线之间的位置关系、距离与交角。
4. 两异面直线的公垂线方程。

四、二次曲面

1. 柱面、锥面、旋转曲面的方程及性质，椭球面、双曲面与抛物面的标准方程和性质，二次曲面的标准方程。

2. 单叶双曲面、双曲抛物面的直纹性

3. 单叶双曲面、双曲抛物面的直母线。

4. 直纹面方程、直线和动曲线的轨迹问题。

五、二次曲线

1. 二次曲线的渐进方向、中心、渐近线。

2. 二次曲线的切线、二次曲线的正常点与奇异点。

3. 二次曲线的直径、共轭方向与共轭直径。

4. 二次曲线的主轴、主方向，特征方程、特征根。