2019年第二届全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（非数类第三轮）竞赛试题参考答案

考生注意：　考试时间 150 分钟　试卷总分 100 分

说明：

1. 答题时间为 2.5 小时，10 月 12 日 8:30-11:00，网上交卷截止时间 11:30；
2. 本答案不完善，完整版本的答案请添加微信 python-cda 出具赛氪系统（https://www.saikr.com/vse/37200 ）报名成功截图领取详细答案和视频讲解课程。

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1．设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义，$f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}=0$，

则 $f'(0)=$ $\underline{\dfrac{1}{2}}$

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\left[\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{n^2-2^2}+\quad+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]=$ $\underline{\dfrac{1}{3}}$

3．若 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le x+y+z$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v=$ $\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\pi}$

4．直线 L_1：$\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 与直线 L_2：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-7}{2}$ 的公垂线方程是

$\underline{L:\begin{cases}16x+27y+17z=90\\58x+6y+31z=175\end{cases}}$

5．设函数 $f(t)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上连续，$\Omega_t=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2,\ z\ge 0\}$，$S_t$ 是 Ω_t 的表面，D_t 是 Ω_t 在 xOy 面上的投影区域，L_t 是 D_t 的边界曲线，已知当 $t\in(0,\ +\infty)$，恒有

$$\int_{L_t} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s+\iint\limits_{S_t}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_t}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma+\iiint\limits_{\Omega_t}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$$

则函数 $f(t)=$ $\underline{-\dfrac{4}{3}t+\dfrac{c}{\sqrt{t}}}$

二、（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内三阶可导，且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内有界．证明 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内都有界．

证明略

三、（12 分）设 $z=z(x,\ y)$ 是由方程 $F(z+\frac{1}{x},\ z-\frac{1}{y})=0$ 确定的隐函数，且具有续的二阶偏导数．求证：$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 和 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$

证明略

四、（12 分）设 $f(x,\ y)$ 在区域 $D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算 $\iint\limits_D(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}\sigma$

解法一：利用格林公式．

$$\iint\limits_D(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{28}=\frac{\pi}{168}$$

五、（12 分）设 $0\le f(x)\le 1$，反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，证明：

$\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)^2$

证明略

六、（10 分）设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(0)=1$，$F(x)f(x)=\cos 2x$，

$a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\mathrm{d}x,\ (n=1,\ 2,\quad)$．求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域与和函数．

解：

收敛域为 $[-1,\ 1)$

$$s(x)=\begin{cases}-\sqrt{2}\left[x\ln(1-x)+1+\frac{1}{2}x+\frac{\ln(1-x)}{x}\right], & -1\le x<1,\ x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

七、（12 分）证明：当 $p \geq 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} < p$

证明略