2019年（第十一届）全国大学生数学竞赛（非数学类）

预赛模拟试题

考生注意：　考试时间 150 分钟　试卷总分 100 分

一、填空题（每小题6分，共30分）

1．已知 $f(x)$ 在 $x=18$ 的邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 18} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 18} f'(x)=673$，

则极限 $\lim\limits_{x\to 18}\dfrac{\int_{18}^{x}\left[t\int_{t}^{18} f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{(18-x)^3}=$ ___2019___

2．设函数 $f(x,\ y)$ 可微，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,\ y)$，$f(0,\ \dfrac{\pi}{2})=1$，且满足

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(0,\ y+\frac{1}{n})}{f(0,\ y)}\right]^n=e^{\cot y}$，则 $f(x,\ y)=$ __$e^{-x}\sin y$__

3．设函数　$f(x)=\int_x^1 e^{y^2}\mathrm{d}y$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{e-1}{2}$

4．若 S 为球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 的外表面，则 $\oiint\limits_S 5x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

__12π__

5．已知 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}, & x\neq 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right], & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$ __-1__

二、（10分）计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\cdot\sqrt[n]{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$．

解：$1\le\sqrt[n]{2+\sin x}\le\sqrt[n]{3}$，$\dfrac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\le\dfrac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\cdot\sqrt[n]{2+\sin x}\le\dfrac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\cdot\sqrt[n]{3}$，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x\le\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\cdot\sqrt[n]{2+\sin x}\,\mathrm{d}x\le\sqrt[n]{3}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x\text{，}$$ ————**4 分**

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\cdot\sqrt[n]{2+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$． ————2 分

而 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{1+e^{-t}}\mathrm{d}(-t)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+e^t}\mathrm{d}t$，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$ ————4 分

即所求极限值为$\frac{\pi}{4}$.

三（10 分） 设函数$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数，且$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$．证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$收敛.

证明：由$f(x)$的连续性、可导性以及$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$，可知

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0$，且$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=1$ ————**2 分**

又函数$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数，有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=f'(0)=1$

由极限的保号性，存在$\delta>0$，使$0<x<\delta$时，$f'(x)>0$

说明$f(x)$在$[0,\delta]$单调递增，且$f(x)>0$ ———— 2 分

所以对正整数$m\ge\frac{1}{\delta}$，正数列$f(\frac{1}{m}),\ f(\frac{1}{m+1}),\ f(\frac{1}{m+2}),\ \cdots$，单调减少，且以 0 为极限 ———— 2 分

由莱布尼兹审敛法知，$\sum\limits_{n=m}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$收敛。——2 分

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=f'(0)=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$发散. ———— 2 分

四、（10 分）设函数$f(x)$连续，a、b、c为常数，$\delta=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，

$\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，试证明：

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(ax+by+cz)\mathrm{d}v=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(\delta u)\mathrm{d}u$$

证法一：利用元素法.

对于固定的u，作平面P_u：$ax+by+cz=\delta u$，点$O(0,\ 0,\ 0)$到平面P_u的距离$d=|u|$

平面P_u与Ω相交的充要条件是$|u|\le 1$ ————4 分

作平面$P_{u+\mathrm{d}u}$：$ax+by+cz=\delta(u+\mathrm{d}u)$

平面P_u与平面$P_{u+\mathrm{d}u}$截Ω成一薄片，这一薄片可视为一扁圆柱，扁圆柱的体积

$\mathrm{d}v=\pi(1-u^2)\mathrm{d}u$，这一薄片的面密度为$f(ax+by+cz)$，这一薄片的质量为

$$f(ax+by+cz)\mathrm{d}v=\pi(1-u^2)f(\delta u)\mathrm{d}u$$ ————4 分

于是，由三重积分的物理意义，

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(ax+by+cz)\mathrm{d}v=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(\delta u)\mathrm{d}u$$ ————2 分

证法二：利用三重积分的换元积分法.

作正交变换$(x,\ y,\ z)\mapsto(\xi,\ \eta,\ \varsigma)$，其中第三个变换为$\dfrac{ax+by+cz}{\delta}=\varsigma$ ——4 分

在$O\xi\eta\varsigma$坐标系中用柱面坐标，$\xi=r\cos\theta,\ \eta=r\sin\theta,\ \varsigma=\varsigma$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(ax+by+cz)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega'} f(\delta\varsigma)\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}f(\delta\varsigma)\mathrm{d}\varsigma\iint\limits_{D_\varsigma} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

其中，$D_\varsigma=\{(r,\ \theta),\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\sqrt{1-\varsigma^2}\}$

于是，$\iint\limits_{D_\varsigma} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\pi(1-\varsigma^2)$ ————4 分

从而$I=\iiint\limits_{\Omega} f(ax+by+cz)\mathrm{d}v=\pi\int_{-1}^{1}(1-\varsigma^2)f(\delta\varsigma)\mathrm{d}\varsigma=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(\delta u)\mathrm{d}u$

————2 分

五、（10 分）设Σ为$x^2+y^2+z^2=1\,(z\ge 0)$的外侧，连续函数$f(x,\ y)$满足

$$f(x,\ y)=2(x-y)^2+\iint\limits_{\Sigma} x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $f(x,\ y)$.

解法一：记 $I_1=\iint\limits_{\Sigma} x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

补充平面 $\Sigma_1:\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$，取下侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial[x(z^2+e^z)]}{\partial x}+\frac{\partial[y(z^2+e^z)]}{\partial y}+\frac{\partial[zf(x,\ y)-2e^z]}{\partial z}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[2z^2+f(x,\ y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1 z^2(1-z^2)\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{15}+\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

————2 分

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$$

于是 $I_1=\iint\limits_{\Sigma} x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{4\pi}{15}+\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\pi=\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{26\pi}{15}$$ ————2 分

$$f(x,\ y)=2(x-y)^2+\iint\limits_{\Sigma}x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即 $\quad f(x,\ y)=2(x-y)^2+\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{26\pi}{15}$

记 $\quad a=\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

则 $\quad a=2\iiint\limits_{\Omega}(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+a\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{26\pi}{15}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$a=2\iint\limits_{D}(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}z+\frac{2\pi}{3}a-\frac{26\pi}{15}\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$a=2\iint_D(x^2+y^2-2xy)\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{2\pi}{3}a-\frac{26\pi}{15}\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$a=2\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{2\pi}{3}a-\frac{26\pi}{15}\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$a=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r+\frac{2\pi}{3}a-\frac{26\pi}{15}\cdot\frac{2\pi}{3}$$

解得 $a=\dfrac{24\pi-52\pi^2}{45-30\pi}$ ————4 分

故 $f(x,\ y)=2(x-y)^2+\dfrac{24\pi-52\pi^2}{45-30\pi}-\dfrac{26\pi}{15}=2(x-y)^2-\dfrac{18\pi}{15-10\pi}$ ————2 分

解法二：设 $a=\iint_\Sigma x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

则 $f(x,\ y)=2(x-y)^2+a$ ————2 分

补充平面 $\Sigma_1:\begin{cases}z=0\\x^2+y^2\le 1\end{cases}$，取下侧，则

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial[x(z^2+e^z)]}{\partial x}+\frac{\partial[y(z^2+e^z)]}{\partial y}+\frac{\partial[zf(x,\ y)-2e^z]}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Omega[2z^2+f(x,\ y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega[2z^2+2(x-y)^2+a]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Omega[2z^2+2x^2+2y^2-4xy+a]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{2}{3}\pi a$$

$=\dfrac{4}{5}\pi+\dfrac{2}{3}\pi a$ ————4 分

$$\iint_{\Sigma_1}x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$=\iint_{D_{xy}}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$ ————2 分

于是 $a=\iint_\Sigma x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zf(x,\ y)-2e^z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{4}{5}\pi+\frac{2}{3}\pi a-2\pi=\frac{2}{3}\pi a-\frac{6}{5}\pi$$

$$a=-\frac{18\pi}{15-10\pi}$$

故 $f(x,\ y)=2(x-y)^2+a=2(x-y)^2-\dfrac{18\pi}{15-10\pi}$ ————2 分

六、(10 分) 设在上半平面 $D=\{(x,\ y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,\ y)$ 具有连续偏导数，且对任意 $t>0$，$f(tx,\ ty)=t^{-2}f(x,\ y)$．证明：对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,\ y)\mathrm{d}x-xf(x,\ y)\mathrm{d}y=0\text{ 。}$$

证明：因为对任意 $t>0$，$f(tx,\ ty)=t^{-2}f(x,\ y)$．两边同时对 t 求导，

则 $xf_1'(tx,\ ty)+yf_2'(tx,\ ty)=-2t^{-3}f(x,\ y)$

令 $t=1$，则 $xf_1'(x,\ y)+yf_2'(x,\ y)=-2f(x,\ y)$ ————5 分

设 $P(x,\ y)=yf(x,\ y),\ Q(x,\ y)=-xf(x,\ y)$，则

$$\frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}=f(x,\ y)+yf_2'(x,\ y),$$

$$\frac{\partial Q(x,\ y)}{\partial x}=-f(x,\ y)-xf_1'(x,\ y)=-f(x,\ y)-(-2f(x,\ y)-yf_2'(x,\ y))=\frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}$$

所以，对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$\oint_L yf(x,\ y)\mathrm{d}x-xf(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ ————5 分

七、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内有二阶导数，且 $f(0)\cdot f(1)>0$，$f''(x)>0\ \ (\forall x\in(0,\ 1))$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：(1) 函数 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 内恰有两个零点；(2) 至少存在一点 $\xi\in(0,\ 1)$，使得 $f'(\xi)=\int_0^{\xi}f(t)\mathrm{d}t$．

证明: (1) 由 $f''(x)>0$，知曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 是向上凹的，故函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上有唯一的最小值点 $x_m\in(0,\ 1)$，且有 $f(x_m)<0$．否则若 $f(x)\ge 0$，这与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾．又因为 $f(0)\cdot f(1)>0$，所以 $f(0)>0,\ f(1)>0$．否则会有

$f(x)<0$ ($\forall x\in(0,\ 1)$)，同样与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾．于是有 $f(0)\cdot f(x_m)<0$，$f(x_m)\cdot f(1)<0$．又因 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，所以由零点定理知，存在 $\xi_1\in(0,\ x_m)$，$\xi_2\in(x_m,\ 1)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$．即 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 至少有两个零点．

————3 分

如果 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 有三个零点，由罗尔定理，函数 $f'(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 内有两个零点，再由罗尔定理，知函数 $f''(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 内有一个零点，这与 $f''(x)>0$ 矛盾．

————2 分

(2) 令

$$F(x)=f'(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$ ————2 分

由 $f'(x_m)=0$ 以及 $f'(x)$ 单调递增，知 $f'(\xi_1)<0,\ f'(\xi_2)>0$．

由(1)可知，$f(x)>0\ (\forall x\in(0,\ \xi_1)\cup(\xi_2,\ 1))$，所以

$$\int_0^{\xi_1} f(x)\mathrm{d}x>0\ ，\ \int_{\xi_2}^1 f(x)\mathrm{d}x>0$$

于是

$$\int_0^{\xi_2} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_{\xi_2}^1 f(x)\mathrm{d}x=0-\int_{\xi_2}^1 f(x)\mathrm{d}x<0$$

故有

$$F(\xi_1)=f'(\xi_1)-\int_0^{\xi_1} f(t)\mathrm{d}t<0\ ，\ F(\xi_2)=f'(\xi_2)-\int_0^{\xi_2} f(t)\mathrm{d}t>0$$ ————2 分

由于 $F(x)$ 在 $[\xi_1,\ \xi_2]\subset(0,\ 1)$ 上连续，故由零点定理，知存在 $\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(0,\ 1)$，使得 $F(\xi)=0$，即有 $f'(\xi)=\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t$． ————1 分

八、（10 分）求顶点为 $A(1,\ 2,\ 3)$，轴与平面 $\pi:2x+2y+z=0$ 垂直，且过点 $B(6,\ 5,\ 5)$ 的圆锥面方程。

解：轴线的方程为：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$

过点 $B(6,\ 5,\ 5)$ 且垂直于轴的平面为：$2(x-6)+2(y-5)+(z-5)=0$

即 $2x+2y+z=27$ ————2 分

该平面与轴的交点为$(5,\ 6,\ 5)$，与点$B(6,\ 5,\ 5)$的距离为$\sqrt{2}$，

———— 2 分

因此圆锥面的准线为$\begin{cases}(x-5)^2+(y-6)^2+(z-5)^2=2\\ 2x+2y+z=27\end{cases}$ ————2 分

对锥面上任一点$(x,\ y,\ z)$，过该点与顶点的母线为

$$\frac{X-1}{x-1}=\frac{Y-2}{y-2}=\frac{Z-3}{z-3}$$ ————2 分

它与准线的交点设为$(X_0,\ Y_0,\ Z_0)$，即存在参数t，使得 $\begin{cases}X_0=1+(x-1)t\\ Y_0=2+(y-2)t\\ Z_0=3+(z-3)t\end{cases}$

将其代入准线方程，并消去t得

$$86x^2+86y^2+143z^2-152xy-76xz-76yz++360x+36y-630z+729=0$$

————2 分