2019 年 (第十一届) 全国大学生数学竞赛
(数学类)
预赛模拟试题

一 、(15 分) 设点 P, Q, R 分别分三角形的边 AB, BC, CA 成定比 l, m, n，证明: 三点 P, Q, R 共线的充要条件为 $lmn = -1$.

证明: 建立平面仿射坐标标架 $\{A, AB, AC\}$，使得点 A, B, C 的坐标分别为 $(0,0), (1,0), (0,1)$.

由定比分点公式知,点 P, Q, R 的坐标分别是 $(\frac{\lambda}{1+\lambda}, 0), (\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}), (0, \frac{1}{1+\nu})$.

————————(5 分)

于是，$\overrightarrow{PQ} = \{\frac{1}{1+\nu} - \frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{\nu}{1+\nu}\}$，$\overrightarrow{PR} = \{-\frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{1}{1+\nu}\}$. 三点 P, Q, R 共线 $\iff \dfrac{\frac{1}{1+\nu} - \frac{\lambda}{1+\lambda}}{-\frac{\lambda}{1+\lambda}} = \dfrac{\frac{\nu}{1+\nu}}{\frac{1}{1+\nu}} \iff \lambda\mu\nu = -1$.

————————(15 分)

二 、(12 分) 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = 2k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，求常数 k 的取值范围.

解: 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} - 2k, x \in (0,1]$.

则 $f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$. ————————(2 分)

记 $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$，则 $g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x$，$g"(x) = \frac{2[\ln(1+x) - x]}{1+x}$，当 $x \in (0,1]$ 时，$g"(x) < 0$，所以，$g'(x) <$

$g'(0)$.

又 $g'(0)=0$，所以，当 $x\in(0,1]$ 时，$g'(x)<0$. 从而，$g(x)<g(0)=0$.

综上，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减. ————————(6 分)

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}-2k)=\dfrac{1}{2}-2k$,

$f(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1-2k$，————————(10 分)

所以,方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}-2k, \\ \dfrac{1}{\ln 2}-1-2k.\end{cases}$

所以，常数 k 的取值范围为 $(\dfrac{1}{2\ln 2}-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4})$. ————————(12 分)

三 、(13 分) 设 f 是一连续函数

(a) 令 $g(t_1,t_2)=f(t_1)\cdot f(t_2)$,证明 $\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} g(t_1,t_2)dt_2=\dfrac{1}{2}(\int_0^t f(x)dx)^2$.

(b) 请把上述结果推广到 g 为 3 元函数的情形，并证明之.

证明:

(a) 左边 $=\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} f(t_1)\cdot f(t_2)dt_2=\int_0^t f(t_1)dt_1\cdot\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2$

令 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $h'(x)=f(x),h(0)=0,\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2=h(t_1)$，

于是上式 $=\int_0^t f(t_1)h(t_1)dt_1=\int_0^t h(t_1)dh(t_1)=\dfrac{1}{2}[h(t_1)]^2|_0^t=\dfrac{1}{2}[h(t)]^2=\dfrac{1}{2}(\int_0^t f(x)dx)^2$. ————————(8 分)

(b) 设 f 是一连续函数，$g(t_1,t_2,t_3)=f(t_1)\cdot f(t_2)\cdot f(t_3)$，则

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\int_0^{t_2} g(t_1,t_2,t_3)dt_3=\frac{1}{3!}(\int_0^t f(x)dx)^3.$$

证明: 左边

$$\begin{aligned}
&=\int_0^t f(t_1)\cdot(\int_0^{t_1} dt_2\int_0^{t_2} f(t_2)\cdot f(t_3)dt_3)dt_1\\
&=\int_0^t f(t_1)\cdot\frac{1}{2}(\int_0^{t_1} f(x)dx)^2dt_1=\frac{1}{2}\int_0^t f(t_1)\cdot[h(t_1)]^2dt_1\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t [h(t_1)]^2dh(t_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot[h(t_1)]^3|_0^t\\
&=\frac{1}{3!}[h(t_1)]^3=\frac{1}{3!}(\int_0^t f(x)dx)^3
\end{aligned}$$

————————(13 分)

四 、(13 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数，且 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛，试证 $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=0$.

证明: 首先我们有 $f(x)\geq 0$，因为若存在 $x_1\geq 0$ 使得 $f(x_1)<0$，则当 $x>x_1$ 时有
$f(x)<f(x_1)<0$，从而 $\int_0^\infty f(x)dx$ 发散，与已知矛盾. ————————(4 分)
由 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛，知对 $\forall\epsilon>0,\exists A\geq 0$, 当 $A">A'>A$ 有，
$\int_{A'}^{A"} f(x)dx<\dfrac{\epsilon}{2}$. ————————(8 分)
故对 $\forall x>2A$ 有
$0\leq xf(x)\leq 2\int_{x/2}^{x} f(t)dt<\epsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=0$. ————————(13 分)

五 、(12 分) 设 $a_2=a_1=a>0, a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}, n=2,3,\cdots$，证明: 对于 $|x|<\dfrac{1}{3}$，幂级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n x^{n-1}$ 收敛，并求其和函数.

证明: 由 $a_2=a_1=a>0, a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$，可得当 $n>2$ 时有 $a_n>a_{n-1}, a_{n+1}<3a_n$，
故对 $|x|<\dfrac{1}{3}, \dfrac{|a_{n+1}x^n|}{|a_n x^{n-1}|}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|x|<3|x|<1$，
于是对 $|x|<\dfrac{1}{3}$，幂级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n x^{n-1}$ 收敛. ————————(6 分)
设其和函数为 $S(x)$，则
$S(x)=\sum_{n=1}^\infty a_n x^{n-1}=a_1+a_2x+\sum_{n=2}^\infty a_{n+1}x^n$
$=a+xS(x)+x^2S(x)$
解得 $S(x)=\dfrac{a}{1-x-x^2}$. ————————(12 分)

六 、(15 分) 设 A 是复数域上的一个 n 阶方阵，$f(x)=|xE-A|$ 是 A 的特征多项式，$g(x)$ 是一个复系数多项式. 证明:$g(A)$ 是可逆的充分必要条件为 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互素.

证明: 若 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互素，则存在多项式 $u(x), v(x)$，使得

$$u(x)g(x)+v(x)f(x)=1.$$

结合哈密尔顿-凯莱定理可得 $u(A)g(A)=E$,即 $g(A)$ 可逆. ————(9 分)

设 $g(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)$, 则 $g(A)=(A-a_1E)\cdots(A-a_nE)$. 由 $g(A)$ 可逆得 $A-a_iE$ 可逆，因此 a_i 均不是 A 的特征值，从而 $g(x),f(x)$ 没有公共根，于是 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互素。————(15 分)

七 、(20 分) 将 m 阶单位矩阵的第一行移到最后一行所得矩阵具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

特别地，$m=1$ 时，上式为 1 阶矩阵 (1). 设 n 阶矩阵 A 的每一行每一列元素均为一个 1，其余元素均为 0，证明:A 与如下形式准对角矩阵 J 相似，其中

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} \qquad (2)$$

其中 (2) 式中的 $J_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均为形如 (1) 式的矩阵.

证明: 对 n 做数学归纳法，若矩阵 A 的对角线上含有 1，不妨设 1 所在的位置为 A 的第 j 行第 j 列，则交换 A 的 1，j 两列可得 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & A_1 \end{pmatrix}$ 相似，其中 A_1 的每一行每一列元素也均为一个 1，其余元素均为 0，对 A_1 应用归纳假设可得结论; ————(10 分)

若 A 的对角线元素均为 0，不妨设第一行 1 的位置在第 j 列，则交换 A 的 2，j 两行，2，j 两列，此时所得矩阵第二行 1 的位置若为第一列，则 A 与矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & A_2 \end{pmatrix}$$

相似，同理对 A_2 应用归纳假设可得结论; 若此时所得矩阵第二行 1 的位置不在第一列，不妨设在第 k 列，则交换此矩阵 3，k 两行，3，k 两

列，……，这样可得 A 与矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ 1 & & & 0 & \\ & & & & A_3 \end{pmatrix}$$

同理对 A_3 应用归纳假设可得结论. ————————(20 分)