

2020 年第三届全国大学生数学竞赛网络挑战赛

(第二轮数学类) 竞赛试题

考生注意： 考试时间 150 分钟 试卷总分 100 分

说明：

1. 答题时间为 2.5 小时，5 月 17 日 8:30-11:00，网上交卷截止时间 11:30；
2. 请同学们把竞赛答案写在干净的答题纸上，答题时请写清楚题号，不需要摘抄题目，并将答题纸拍照（可拍多张照片，按顺序答题，标清题号，方便老师评阅），最后将图片放到 word 中，再用 word 转成 PDF，上传 PDF 格式文件。
3. 添加助教老师微信 jizhidata，获得视频讲解课程，如有问题及时沟通。
4. 答题完成在赛氩报名系统（<https://www.saikr.com/vse/37760>）上传答卷，本次答卷请对应上传到“第二轮数学类答案”一栏，第一轮附件上传位置留空。
5. 如果无法在赛氩系统中提交，可以发送试题答案至备用邮箱 math@mathor.com（邮件标题：参赛编号+数学类/非数类；附件文档命名规则，参赛编号+数学类/非数类.pdf），超过指定时间提交答卷不予判分。

1、(13 分) 设 $x_1 = 2, x_n + (x_n - 4)x_{n-1} = 3(n = 2, 3, \dots)$ ，试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

2、(12 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且

$$g(0) = 1, g'(0) = -1.$$

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性

3、(12 分) 已知 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$,

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, \dots), x_1 = a > 0, y_1 = b > 0 (a < b),$$

证明数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都收敛于同一值。

4、(13分) 将 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(101)}(0)$.

5、(20分) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A = (a_i b_j + 1)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, E 为 n 阶单位矩阵, 计算 $A - E$ 的行列式。

6、(15分) 设 l_1, l_2 是两条相互正交的直线, l_1 绕 l_2 作等速转动, 同时沿 l_2 作等速直线运动, 在运动中始终保持 $l_1 \perp l_2$, 试建立此曲面的参数方程。

7、(15分) 设 V 是欧氏空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 上的内积, 证明:

1) 对 V 中每个线性变换 σ , 都存在唯一的线性变换 σ^* , 使得对于 $\forall \alpha, \beta \in V$, 都有

$$\langle \sigma(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \sigma^*(\beta) \rangle;$$

2) σ 是对称变换的充分必要条件是 $\sigma^* = \sigma$;

3) σ 是正交变换的充分必要条件是 $\sigma^* \sigma = \sigma \sigma^* = I$, 其中 I 是 V 上的恒等变换。