2020 年第三届全国大学生数学竞赛网络挑战赛

（非数类第三轮）竞赛试题

考生注意：　考试时间__150__分钟　试卷总分__100__分

说明：

1. 答题时间为 2.5 小时，10 月 31 日 9:00-11:30，网上交卷截止时间 12:00；
2. 请同学们把竞赛答案写在干净的答题纸上，答题时请写清楚题号，不需要摘抄题目，并将答题纸拍照（可拍多张照片，按顺序答题，标清题号，方便老师评阅），最后将图片放到 word 中，再用 word 转成 PDF，上传 PDF 格式文件。
3. 添加助教老师微信 jizhidata，获得视频讲解课程，如有问题及时沟通。
4. 答题完成在赛氪报名系统（https://www.saikr.com/vse/37760）上传答卷，本次答卷请对应上传到“第三轮非数学类竞赛答卷”一栏，其他的附件上传位置留空。
5. 如果无法在赛氪系统中提交，可以发送试题答案至备用邮箱 math@mathor.com（邮件标题：参赛编号+数学类/非数类；附件文档命名规则，参赛编号+数学类/非数类.pdf），超过指定时间提交答卷不予判分。

一、填空题（每题 6 分，共 30 分，请直接将答案写到答题纸上）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left|1-2+3-\cdots+(-1)^{n+1}n\right|=$______

2．设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可微，且满足 $2f(2+x)+f(2-x)=3+2x+o(x)$，其中 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小（当 $x\to 0$ 时），则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,\ f(2))$ 处的切线方程为________

3．设 $f(x)$ 连续，且 $x>-1$ 时，$f(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+1\right)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，则 $f(x)=$__

4．设直线 L 过 $A(1,\ 0,\ 0)$、$B(0,\ 1,\ 1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为__________

5．设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-2)^2=(1-z)^2\ (0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，则 Ω 的形心坐标为_________．

二（12 分）、已知函数 $y(x)$ 满足 $(x+1)y''=y'$，$y(0)=3$，$y'(0)=-2$，试证：当 $x\geq 0$ 时，有不等式 $\int_0^x y(t)\sin^{2n-2}t\mathrm{d}t\leq\dfrac{4n+1}{n\left(4n^2-1\right)}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ 成立.

三（12 分）、设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数，且满足关系式 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，$-\infty<x<+\infty$. 若 $f(0)=f'(0)=0$，试证明：当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq\dfrac{1}{2}x^2$，且 $\dfrac{1}{2}$ 不能再换为较小的数.

四（12 分）、已知函数 $f(x,\ y)$ 有连续偏导数，且在单位圆周 $L: x^2+y^2=1$ 上的值为 0，L 围成的闭区域为 D，k 为任意常数.

（1）计算 $\iint\limits_D\left[\left(x-ky\right)f_x'(x,\ y)+\left(kx+y\right)f_y'(x,\ y)+2f(x,\ y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（2）若 $f(x,\ y)$ 在 D 上任意点处沿任意方向的方向导数的值都不超过常数 M，证明：$\left|\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\dfrac{1}{3}\pi M$

五（12 分）、证明：当 $p\ge 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$

六（12 分）、已知曲面 $x^2+2y^2+4z^2=8$ 与平面 $x+2y+2z=0$ 的交线 Γ 是椭圆，Γ 在 xOy 平面上的投影 Γ_1 也是椭圆.

（1）试求椭圆 Γ_1 的四个顶点 A_1, A_2, A_3, A_4 的坐标（A_i 位于第 i 象限，$i=1, 2, 3, 4$）；

（2）判断椭圆 Γ 的四个顶点在 xOy 平面上的投影是否是 A_1, A_2, A_3, A_4，写出理由.

七（10 分）、设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内连续，且 $f(0)=1$， $f''(0)=2$． 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 是绝对收敛的.