竞 赛 试 卷2（数学专业）

一、(15 分）设a,b是两常数，且$0<a<1$，$b>0$，存在平面$Ax+By+Cz=0$与两曲面$\frac{x^2}{a^2}+y^2-\frac{z^2}{4}=1$及$\frac{x^2}{b^2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$的截痕都是圆。求$A,B,C$所满足的条件及$a,b$所满足的关系式。

二、(12 分）设$f(x)$为连续实值函数，对所有x满足$f(x)\geq 0$，且有$\int_0^{+\infty} f(x)dx<\infty$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx=0$。

三、(12分）设对自然数n有$a_n>0$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$，试证:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}=\infty$ ；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n{}^2}$收敛。

四、(13 分）设$f(x)$是定义在$[1,+\infty)$上的连续可微函数，且$f'(x)=\frac{1}{f^2(x)+1}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$，试证$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。

五、(13 分）设α,β是常数，且$0<\alpha<\beta$，证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x})\sin x}{x}dx=\arctan\beta-\arctan\alpha 。$$

六、(15 分） 设A, B均是复数域上的一个n级方阵，若$A+B$和$A-B$皆可逆，试证$G=\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}$可逆，并求其逆矩阵。

七、(20 分）设V是复数域$\mathbb{C}$上的一个n维线性空间，σ,τ是V上的两个线性变换，$f_\sigma(\lambda), f_\tau(\lambda)$分别为$\sigma,\tau$的特征多项式。试证$f_\sigma(\tau)$是可逆线性变换的充要条件是$\sigma$与$\tau$没有相同的特征值。